Практическая работа № 2

Решение систем линейных уравнений третьего порядка.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений третьего порядка методом Крамера и методом Гаусса.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где, a_{ij} (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) и b_i (i=1,2,...,m), постоянные величины.

2 Решением системы уравнений называется такой n-мерный вектор X = (x_1, x_2,...,x_n), который одновременно является решением каждого из уравнений системы.

3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера: пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы системы и через Δ_j определитель, который получается из определителя Δ заметой j-го столбца столбцом правых частей системы (j=1,2,...n).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель матрицы отличен от нуля, т.е. Δ≠0, то система имеет единственное решение, которое находится по формуле: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}\ (j = 1,2,\ldots,n)$

4 Суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью некоторых операций исходную систему уравнений можно свести к более простой системе. Эта простая система имеет треугольный вид:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ a_{2N}x_N &= b_2 \\
a_{33}x_3 + \ldots\ a_{3N}x_N &= b_3 \\
\ldots \\
\ldots\ a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}
$$

Особенность этой системы - в строках с номером i все коэффициенты a_{ij} при $j<i$ равны нулю. Если мы смогли привести нашу систему уравнений к такому треугольному виду, то решить уравнения уже просто. Из последнего уравнения находим $x_N = b_N / a_{NN}$. Дальше подставляем его в предпоследнее уравнение и находим из него x_{N-1}. Подставляем оба найденных решения в следующее с конца уравнение и находим x_{N-2}. И так далее, пока не найдем x_1, на чем решение заканчивается. Такая процедура называется обратной прогонкой.

5 Если к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ добавить в качестве *(n+1)-ого* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы линейных уравнений, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

6 Для приведения системы уравнений к треугольному виду воспользуемся свойствами: если с системой линейных алгебраических уравнений произвести следующие действия:

- поменять местами два уравнения,

– умножить обе части какого-либо уравнения на произвольное и отличное от нуля действительное (или комплексное) число k,

– к обеим частям какого-либо уравнения прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на произвольное число k, то получится эквивалентная система, которая имеет такие же решения (или также как и исходная не имеет решений).

7 Две системы называются эквивалентными (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение

8 Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием

Задание

Исходные данные:

1 Решить методом Крамера систему линейных уравнений третьего порядка $\begin{cases} x-4y-2z=3 \\ 3x-5y-6z=23 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$.

Решение:

а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5+6) + 4\cdot(3+18) - 2(3+15) = 1 + 84 - 36 = 49$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

б) Вычислим Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 23 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 23 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-5+6) + 4\cdot(23) - 2(23) = 3 + 92 - 46 = 49$$

в) Вычислим Δ_y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 23 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 23 - 3 \cdot (3 + 18) - 2(-69) = 23 - 66 + 138 = 98$$

г) Вычислим Δ_z:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 23 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 23 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 4 \cdot (-69) + 3(3 + 15) = -23 - 276 + 54 = -245$$

г) По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{49}{49} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{98}{49} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-245}{49} = -5$$

Ответ: (1; 2; – 5)

2 Решить методом Гаусса систему линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде и приведем ее к треугольной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 & 23 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 13 & 7 & -9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 49 & -245 \end{array}\right)$$

Тогда получим: $z = \frac{-245}{49} = -5; \quad y = \frac{14}{7} = 2; \quad x = 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 1$

Задания к практической работе.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x+2y+2z=-3 \\ -2x-2y-3z=1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y+5z=7 \\ 4x+2y-z=3 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$

9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=1 \\ x+2y-z=5 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=-1 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$

20 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$

21 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$

22 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

26 $\begin{cases} x+5y+3z=-1 \\ 3x+y-5z=-3 \\ -2x-3y+z=2 \end{cases}$

27 $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 5x+3y+2z=-1 \\ x-y+4z=1 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -4x+3y-z=3 \\ 3x-2y-2z=11 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 4x+5y+4z=-3 \\ 3x+3y-5z=8 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+4y+5z=2 \\ -4x-7y-3z=3 \end{cases}$

31 $\begin{cases} -x+y-z=-6 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$

32 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 5x+7y-4z=3 \\ 2x-2y-7z=-3 \end{cases}$

33 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 3x+7y+z=2 \\ -2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

34 $\begin{cases} -x-y-z=-2 \\ 7x-4y-z=-4 \\ -5x+3y+2z=9 \end{cases}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 2

Тема занятия: *решение систем линейных уравнений третьего порядка*

Цель выполнения задания: *научиться решать системы линейных уравнений третьего порядка методом Крамера и методом Гаусса.*

Необходимо знать: *основные формулы и правила линейной алгебры*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила линейной алгебры*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое матричная форма системы линейных уравнений? 2 Что такое определитель матрицы? 3 Что такое матрица? 4 Суть метода Крамера решения систем. 5 Суть метода Гаусса решения систем. 6 Что такое расширенная матрица? 7 Правила приведения матрицы к треугольному виду. 8 Свойства систем линейных уравнений. 9 Что такое равносильные системы? 10 Что такое равносильные преобразования?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://www.cleverstudents.ru

5 http://www.coolreferat.com