

Практическая работа № 16

Определение вероятности. Геометрическая вероятность.

Сложение и умножение вероятностей

Цель работы: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности и по формуле геометрической вероятности, вычисление вероятностей совместных событий, определение вероятности по формулам суммы и произведения

Содержание работы:

Основные понятия.

- 1 Событие называется случайным или возможным, если в результате опыта оно может произойти, а может и не произойти
- 2 Событие, которое в данных условиях обязательно произойдет, называется достоверным
- 3 Событие, которое в данных условиях не может произойти, называется невозможным
- 4 События называются равновозможными, если ни одно из них не является более возможным, чем другие
- 5 События называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого
- 6 События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого
- 7 Два несовместных события, из которых одно обязательно произойдет, называются противоположными
- 8 Несколько несовместных событий образуют полную группу, если в результате опыта одно из них обязательно происходит
- 9 Пусть произведена серия из n опытов, в каждом из которых некоторое событие A может появиться или не появиться. Допустим событие A появилось m раз. Относительной частотой события A называется отношение числа m появлений события к числу n всех произведенных опытов: $r(A) = \frac{m}{n}$

10 Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию случаев к общему числу n всех единственно возможных и равновозможных случаев: $P(A) = \frac{m}{n}$. Случай называется благоприятствующим некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события

11 На практике часто встречаются испытания, исходы которых являются или не равновозможными или их число бесконечно. Множество исходов испытания такого типа бесконечно, оно может быть иллюстрировано геометрически в виде совокупности точек отрезка прямой, плоской фигуры или пространственного тела. Такую схему испытаний принято называть геометрической. Тогда геометрическая вероятность $P = \frac{mesg}{mesG}$, где $mesg$ и $mesG$ есть меры соответствующих областей, выраженные в единицах длины, площади или объема

12 Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B . Суммой нескольких событий, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий

13 Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A , и событие B . Аналогично произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события

14 Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

15 Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

16 Вероятность события B , вычисленная при условии, что имело место другое событие A , называется условной вероятностью события B . Обозначение: $P(B/A)$.

17 Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right).$$

18 Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

19 Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$: $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, где $q_i = P(\overline{A_i}) = 1 - p_i$; $p_i = P(A_i)$

Примеры выполнения:

1 **Исходные данные:** набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что набраны нужные цифры?

Решение:

Обозначим через A = набран правильный номер.

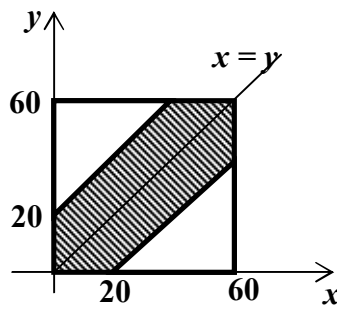
Всего цифр 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Количество комбинаций вычисляется по формуле размещений без повторений, т. к. из 10 цифр выбираем 2, порядок следования цифр имеет значение, а по условию цифры различны. Значит, количество возможных исходов $= A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$, а благоприятный исход только один – правильный номер.

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{1}{90}$$

2 **Исходные данные:** в сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью 1 час. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 20 мин. Найти вероятность

того, что сигнализатор сработает за час, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение:



Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств через x и y . Графически отобразим время поступления сигналов ($x < 60$ мин., $y < 60$ мин.). Получим квадрат – это возможные исходы поступления сигналов. Если сигналы поступили одновременно, то это диагональ квадрата. Благоприятные исходы – заштрихованная область, т. к. сигналы фиксируются, если $|x - y| \leq 20$. Тогда

$$P = \frac{S_{\text{заштрих}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{60 \cdot 60 - 0,5 \cdot 40 \cdot 40 - 0,5 \cdot 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$$

Ответ: $P = \frac{5}{9}$

3 Исходные данные: Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,7, а для второго - 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков

Решение:

Если в мишень попадает только один из стрелков, значит это или первый, или второй. Обозначим через A = мишень поразил первый стрелок, тогда второй стрелок в мишень не попал, через B = мишень поразил второй стрелок, а первый промахнулся, т. к. оба стрелка стреляли одновременно. Вероятность попадания первого стрелка $p_1 = 0,7$, промаха $q_1 = 1 - 0,7 = 0,3$, второго стрелка $p_2 = 0,8$, $q_2 = 1 - 0,8 = 0,2$. $P(A) = p_1 q_2$; $P(B) = p_2 q_1$.

Попадание одного стрелка не зависит от попадания другого. Следовательно имеем сумму независимых событий и $P(A + B) = P(A) + P(B)$

$$P = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38.$$

Ответ: $P = 0,38$

Задания к практической работе.

1 Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго, третьего и четвертого элементов соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента

2 Самолет бомбит объект, занимающий площадь 100π м². Зона бомбометания – эллипс с полуосями 200 м и 250 м. Определить вероятность прямого попадания в объект одной бомбой, если предполагать, что попадания бомб в любую точку зоны бомбометания равновозможны.

3 Определить число промахов, если известно, что произведено 16 выстрелов, а частота попадания равна $\frac{1}{4}$

4 Трое охотников одновременно выстрелили по лисе, которая была убита одной пулей. Определить вероятность того, что лиса убита третьим охотником, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,2; 0,4; 0,6.

5 Автомобиль во время своего пути может остановиться по четырем причинам. Вероятности остановки по этим причинам соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,7. Найти вероятность хотя бы одной остановки по какой-либо из причин

6 При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов

7 На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что из четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово трос

8 В ящике 20 сигнальных ракет, из которых 6 красного цвета, остальные зеленого цвета. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти ракет 3 окажутся красного цвета?

9 Два студента условились встретиться в определенном месте между 13 и 15 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после чего

уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов)

10 Три стрелка производят по одному выстрелу в мишень с вероятностями попадания 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что в мишени окажется не менее двух пробоин?

11 Определить вероятность того, что наудачу взятое двузначное число будет начинаться цифрой 6, а заканчиваться цифрой, не превышающей 3

12 Три стрелка производят по одному выстрелу в мишень с вероятностями попадания 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что в мишени окажется хотя бы одна пробоина?

13 Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата

14 На соревновании по метанию ядра приехали 2 спортсмена из Великобритании, 2 из Испании и 4 из Швейцарии. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать спортсмен из Испании.

15 Два охотника соревнуются: кто подстрелит больше уток при двух выстрелах, тот и победит. Вероятность попадания первого охотника в утку равна 0,5, второго - 0,6. Какова вероятность того, что выиграет первый охотник? Считать, что при одном выстреле можно убить только одну утку.

16 В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка X . Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции $AMCD$, где точка M делит отрезок CB в отношении 1:2, считая от точки B

17 В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными

18 Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5

19 В урне три красных и четыре синих кубика, одинаковых по своим размерам. Два игрока поочередно извлекают по одному кубику, не возвращая

их обратно. Определить вероятность того, что первый игрок достанет красный кубик раньше второго

20 В квадрате ABCD случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции AMCD, где точка M середина стороны BC

21 Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Найти вероятность того, что билеты выиграют 3 юноши и 1 девушка

22 Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу для заправки. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время заправки первого парохода - 1 час, а второго - 2 часа

23 Определить число промахов, если известно, что произведено 16 выстрелов, а частота попадания равна $\frac{3}{8}$

24 Два поезда должны подойти к вокзалу в течение 30 минут. Время стоянки первого поезда - 10 минут, второго поезда - 15 минут. Определить вероятность того, что эти поезда встретятся на вокзале

25 В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными

26 Два грузовика приезжают к одному и тому же складу для погрузки. Время их прибытия независимо и равновозможно в течение 12 часов. Определить вероятность того, что одному из грузовиков придется ожидать освобождения склада, если время погрузки первого грузовика 2 часа, а второго - 4 часа

27 В магазин привезли 100 чипов, причем известно, что 5 из них с дефектами. Покупатель берет 10 чипов. Определить вероятность, что среди этих 10 чипов 1 с дефектом

28 Молодой человек и девушка условились встретиться в определенном месте между 19 и 20 часами вечера. Если молодой человек приходит первым, то

ждет девушку 40 минут, если же девушка приходит первой, то ждет молодого человека 5 минут. Найти вероятность того, что они не встретятся

29 Вероятность забросить мяч в корзину для баскетболиста равна $\frac{2}{3}$. Сколько нужно сделать бросков, чтобы с вероятностью не менее 0,95 быть уверенным в том, что мяч хотя бы один раз окажется в корзине?

30 Определить число промахов, если известно, что произведено 16 выстрелов, а частота попадания равна 1

31 Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,2; 0,15, 0,1. Определить вероятность непопадания в мишень

32 Для поражения цели при стрельбе в данных условиях достаточно одного попадания. Определить расход снарядов для выполнения огневой задачи с вероятностью 75%, если вероятность попадания при одном выстреле 5%

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 16

Тема занятия: *Определения вероятностей по определению, по формуле геометрической вероятности, формулам сложения и умножения вероятностей*

Цель работы: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности и по формуле геометрической вероятности, вычисление вероятностей совместных событий, определение вероятности по формулам суммы и произведения

Цель выполнения задания: *вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, по формуле геометрической вероятности и формулам сложения и умножения вероятностей.*

Необходимо знать: *основные понятия, формулы и правила теории вероятностей*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила теории вероятностей*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: Могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные понятия, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы: 1 Что такое случайное событие? 2 Что такое достоверное событие? 3 Что такое невозможное событие? 4 Что такое равновозможные события? 5 Что такое совместные события? 6 Что такое несовместные события? 7 Что такое противоположные события? 8 Что такое полная группа несовместных событий? 9 Что такое относительная частота события? 10 Что такое вероятность события? 11 Чем отличаются относительная частота и вероятность события? 12 Что такое сумма событий? 13 Что такое произведение событий? 14 Что такое условная вероятность события? 15 Формула суммы несовместных событий. 16 Формула суммы совместных событий. 17 Формула произведения независимых событий. 18 Формула произведения событий. 19 Формула вероятности наступления хотя бы одного события.

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 В.П. Омельченко Математика, 2012, Ростов-на-Дону, Феникс
- 3 <http://wiki.kgpi.ru>
- 4 <http://rudocs.exdat.com>
- 5 <http://gendocs.ru>