Практическая работа № 17

Полная вероятность. Формула Байеса. Формула Бернулли

Цель работы: вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы полной вероятности, формулы Байеса и Бернулли.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Формула полной вероятности: Вероятность события A, которое может произойти совместно с одной из гипотез H_1, H_2,…, H_n, образующих полную группу несовместных событий ($\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$) равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие им условные вероятности события A: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

2 Формула Байеса: Вероятность гипотезы при условии, что событие А произошло, равна произведению вероятности этой гипотезы на соответствующую ей условную вероятность события А, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность события А.

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}$$

3 Если производится n независимых опытов в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p, тогда вероятность того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$

Пример выполнения:

исходные данные:

1 Каждый из двух стрелков независимо друг от друга произвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым стрелком

Решение: Событие A – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 – ни один стрелок не попадет;

H_2 – первый стрелок попадет, второй – нет;

H_3 – второй стрелок попадет, первый – нет.

H_4 – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны:

$P(H_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$

$P(H_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$

$P(H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

$P(H_4) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$P\left(A/H_1\right) = 0$; $P\left(A/H_2\right) = 1$; $P\left(A/H_3\right) = 1$; $P\left(A/H_4\right) = 0$.

После опыта гипотезы H_1 и H_4 становятся невозможными, а вероятность гипотезы H_2 будет равна $P\left(H_2/A\right) = \dfrac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(H_3)\cdot P\left(A/H_2\right) + P(H_4)\cdot P\left(A/H_3\right)} = \dfrac{0{,}28\cdot 1}{0{,}28+0{,}18} \approx 0{,}61$;

Ответ: вероятность того, что объект поражен первым стрелком, равна 0,61.

2 Для нормальной работы линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

Решение: Т.к. для нормальной работы надо 8 автобусов из 10, или 9 из 10, или 10, а вероятность выхода каждого автобуса p = 1 – q = 1 – 0,1 = 0,9. Вероятность нормальной работы – это сумма вероятностей:

$$P(A) = C_{10}^{8} p^{8} q^{10-8} + C_{10}^{9} p^{9} q^{10-9} + C_{10}^{10} p^{8} q^{10-8} =$$

$$= \frac{10!}{8!\cdot 2!}(0{,}9)^8(0{,}1)^2 + \frac{10!}{9!\cdot 1!}(0{,}9)^9(0{,}1) + \frac{10!}{10!\cdot 0!}(0{,}9)^{10}(0{,}1)^0 \approx$$

$$\approx \frac{9\cdot 10}{2} 0{,}43\cdot 0{,}01 + 10\cdot 0{,}39\cdot 0{,}9 + 0{,}35 \approx$$

$$\approx 0{,}19 + 0{,}39 + 0{,}35 = 0{,}93$$

Ответ: $P(A) = 0{,}93$

Задания к практической работе.

1 В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе № 2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества

2 Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх не больше 3 раз.

3 Игральная кость бросается 20 раз. Определить вероятность того, что 3 очка выпадут 7 раз

4 В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

5 Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукций первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?

6 Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх ровно 3 раза

7 На склад поступает продукция 3-х фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятые изделия произведены на первой фабрике, если они оказались нестандартными

8 Авиакружок посещают 20 человек. Определить вероятность того, что в кружке 4 девушки, если вероятность заинтересованности девушек этим кружком равна 0,2.

9 В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без прицела – 0,7. Найти вероятность того, что

мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

10 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 10 случайно отобранных семян взойдет не менее 8.

11 По самолету производится 3 выстрела с вероятностями попадания 0,5; 0,6; 0,8. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

12 В институте 40% юношей - брюнеты, 35% - блондины, 25% - рыжие. Вероятность, что студентке Красавиной понравится брюнет, равна 0,7, блондин - 0,8, рыжий - 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент понравится Красавиной

13 В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что число заключенных договоров после 10 визитов составит 3.

14 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу микросхема окажется бракованной?

15 В первом контейнере находится 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Во втором находится 50 деталей, из которых 30 бракованных. В третьем контейнере - 50 деталей, среди которых 40 бракованных. Из случайно выбранного контейнера извлекается одна деталь, которая оказалась качественной. Определить вероятность того, что деталь была извлечена из первого контейнера

16 Страховая компания заключила 10 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2 %. Найти вероятность того, что таких случаев будет 2

17 Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

18 Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковых машин эта вероятность равна 0,2.

К бензоколонке подъехала машина для заправки. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

19 Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее 3?

20 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой урны.

21 При разрыве снаряда образуются 10% крупных осколков, 60% средних и 30% мелких. Вероятность пробивания брони крупным осколком – 0,7, средним – 0,2 и мелким – 0,05. Известно, что в броню попал осколок. Найти вероятность того, что броня пробита

22 Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно

23 На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20, с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и 5 % продукции этих предприятий, соответственно имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет дефектна.

24 Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p=0,75. Найти вероятность того, что при 10 посещениях клиент совершит покупку ровно 8 раз

25 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из второй урны.

26 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдет 70.

27 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена вторым поставщиком?

28 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда - с вероятностью 0,7; если три снаряда - с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

29 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена не более двух раз

30 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена первым поставщиком?

31 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдет ровно 80 семян.

32 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из третьей урны.

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 17

Тема занятия: *Полная вероятность. Формула Байеса. Формула Бернулли*

Цель выполнения задания: *вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы полной вероятности, формулы Байеса и формулы Бернулли.*

Необходимо знать: *основные понятия, формулы и правила теории вероятностей*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила теории вероятностей*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1* .

Литература:

http://cyberfac.ru

http://www.matburo.ru

http://www.toehelp.ru