Практическая работа № 4

Выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме.

Цель работы: научиться переводить комплексные числа в тригонометрическую и показательную форму ивыполнять действия над числами

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Пусть $z = x + iy$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и φ =*argz*. Тогда тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r}$

2Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и один из аргументов $\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow tg\varphi = \frac{y}{x}$; $\varphi = arctg\frac{y}{x}$

3Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда произведение $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

4Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда частное $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

5 Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

6Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $n \in Z$, тогда степень $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

7Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $n \in Z$, тогда корень zn-ной степени $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$

8 Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, которая носит название *формулы Эйлера*.

9 Показательная форма записи комплексного числа имеет вид $z = re^{i\varphi}$

10 Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам степеней: пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \quad z_1^{\,n} = r_1^{\,n} e^{in\varphi_1}$$

Задание

Исходные данные:

Представьте число $\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{i-1}\right)^4$ в тригонометрической, алгебраической и показательной формах

Решение:

а)Переведем число *i – 1*в тригонометрическую форму:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \quad tg\varphi = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

б)Переведем число $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ в тригонометрическую форму:

$$\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

в)Найдем частное: $\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{i-1}\right) = \dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

г)Возведем частное в степень:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{12}\right)\right)=$$
$$\frac{2^2}{2^4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

д) Переведем результат в показательную форму записи комплексного числа: $\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=0{,}25e^{-i\frac{\pi}{3}}$

е) Представим полученное число в алгебраической форме:

$$\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

Ответ:

$$0{,}25e^{-i\frac{\pi}{3}};$$

$$\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$$

Задания к практической работе.

Выполните действия в тригонометрической форме и представьте число в тригонометрической, алгебраической и показательной формах:

1 $\frac{i-1}{1+i}$

2 $\left(2+\sqrt{12}i\right)^5$

3 $\left[\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right]^4$

4 $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$

5 $\sqrt[3]{-1+i}$

6 $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

7 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$

8 $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$

9 $\left[\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right]^4$

10 $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

11 $\left(2+\sqrt{12}i\right)^5$

12 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$

13 $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

14 $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$

15 $\left[\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right]^4$

16 $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$

17 $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

18 $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

19 $\sqrt[3]{-1+i}$

20 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$

21 $\left(\frac{0,5-i\cdot 0,5\sqrt{3}}{0,5\sqrt{3}-i\cdot 0,5}\right)^4$

22 $\left(\frac{0,5-i\cdot 0,5\sqrt{3}}{0,5\sqrt{3}-i\cdot 0,5}\right)^4$

23 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

24 $\frac{i-1}{1+i}$

25 $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$

26 $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$

27 $\left(2+\sqrt{12}i\right)^5$

28 $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

29 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

30 $\left(\frac{0,5-i\cdot 0,5\sqrt{3}}{0,5\sqrt{3}-i\cdot 0,5}\right)^4$

31 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

32 $\sqrt[3]{-1+i}$

33 $\frac{i-1}{1+i}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 4

Тема занятия: *перевод чисел ивыполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательнойформе*

Цель выполнения задания: *научиться переводить числа ивыполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме*

Необходимо знать: *основные формулы и правила действий над комплексными числами*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила действий над комплексными числами*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа? 2 Как перевести число в тригонометрическую форму? 3 Как найти произведение чисел в тригонометрической форме? 4 Как найти частное чисел в тригонометрической форме?Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?7Как найти корень n-ной степени изчисла в тригонометрической форме?8Формула Эйлера 9 Как представить комплексное число в показательной форме? 10 Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел? 11 Как найти произведение чисел в показательной форме? 4 Как найти частное чисел в показательной форме?Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?7Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://mvm-math.narod.ru

5 http://www.pm298.ru

6 http://www.fxyz.ru

7 http://old.college.ru

8 http://fxdx.ru

9 http://webmath.exponenta.ru