

Практическая работа № 3

Графы. Способы задания графов. Степени вершин.

Цель работы: задание графа, вычисление степеней вершин.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Граф G - совокупность двух множеств: вершин V и ребер E , между которыми определено отношение инцидентности. Если $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$, то граф G есть (n,m) граф, где n - порядок графа, m - размер графа.

2 Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v' , v'' , которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными.

3 Ребро (v',v'') может быть ориентированным и иметь начало (v') и конец (v'') (дуга в орграфе).

4 Ребро (v,v) называется петлей (концевые вершины совпадают).

5 Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

6 Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

7 Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

8 Конечный граф - число вершин и ребер конечно.

9 Пустой граф - множество ребер пусто (число вершин может быть произвольным).

10 Полный граф - граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединена ребром.

11 Локальная степень вершины - число ребер ей инцидентных.

12 В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степень вершины.

13 В орграфе сумма входящих ребер всех вершин равна сумме исходящих ребер всех вершин и равно числу ребер графа.

14 Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

15 Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются изоморфными.

16 Способы задания графов:

- явное задание графа как алгебраической системы;
- геометрический;
- матрица смежности;
- матрица инцидентности

17 Матрица инцидентности: По вертикали указываются вершины, по горизонтали - ребра. $a_{ij}=1$ если вершина i инцидентна ребру j , в противном случае $a_{ij}=0$. Если ребро - петля, то $a_{ij}=2$. Матрицей инцидентности (инциденций) ориентированного графа называется матрица, для которой $a_{ij}=1$, если вершина является началом дуги, $a_{ij}=-1$, если является концом дуги, в остальных случаях $a_{ij}=0$.

18 Матрица смежности - квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали - все вершины. a_{ij} = число ребер, соединяющее вершины i, j . Матрицей смежности ориентированного графа называется матрица, для которой $a_{ij}=1$, если вершина является началом дуги, в остальных случаях $a_{ij}=0$.

19 Маршрут - последовательность ребер, в которых каждые два соседних ребра имеют общую вершину.

20 Маршрут, в котором начало и конец совпадают - циклический.

21 Маршрут в неографе, в котором все ребра разные - цепь.

22 Маршрут в орграфе, в котором все дуги разные - путь.

23 Вершины связанные, если существует маршрут из одной вершины в другую.

24 Связанный граф - если все его вершины связаны.

25 Плоский граф - граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимися ребрами.

26 Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются изолированными.

27 Дерево - связный граф без циклов.

Пример выполнения:

исходные данные:

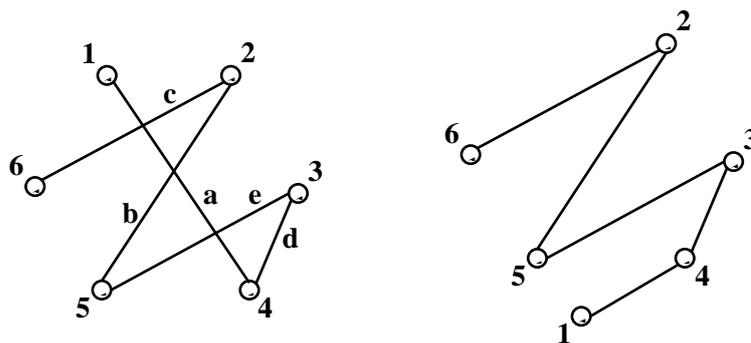
1 Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

$$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; E = \{a; b; c; d; e\}$$

$$E = \{(1; 4); (2; 5); (2; 6); (3; 4); (3; 5)\}$$

Решение:

1 Изобразим граф, соединив вершины: Ребра соединяет вершины 1 и 4, b соединяет вершины 2 и 5 и т. д. Затем преобразуем этот граф в плоский:



2 Составим матрицу смежности. В первом столбце и первой строке выпишем вершины. Ребра a инцидентны вершины 1 и 4, следовательно в колонке 1 и строке 4 ставим 1, а также колонке 4 и строке 1 ставим 1. Ребра b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно в колонке 2 в строке 5 и колонке 5 строке 2 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы содержат нули.

3 Составим матрицу инцидентности. В первом столбце выпишем вершины, первой строке – ребра. Ребра a инцидентны вершины 1 и 4, следовательно в колонке a в строке 1 и строке 4 ставим 1. Ребра b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно в колонке b в строке 2 и строке 5 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы заполняем нулями.

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0

Матрица инцидентности

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0

4 Вычислим степени вершин:

$$p(1) = 1 \quad p(2) = 2 \quad p(3) = 2 \quad p(4) = 2 \quad p(5) = 2 \quad p(6) = 1$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 10 = 2 \cdot q$$

$$q = 5 \text{ (ребер 5)}$$

исходные данные:

2 Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

	a	b	c	d	e	f
1	-1	-1	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	0	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1
6	0	1	0	0	0	1

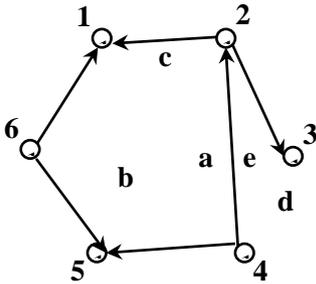
Решение:

1 Количество вершин – 6. $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2 Ребро a выходит из вершины 2, т.к. в ячейке (2; 1) стоит 1, а приходит в вершину 1 (в ячейке (1; 1) находится -1) и т.д.

Получим множество $E = \{(2; 1); (6; 1); (4; 2); (2; 3); (4; 5); (6; 5)\}$

3 Изобразим граф, соединив вершины, этот граф уже плоский, т.к. ребра не пересекаются:



4 Составим матрицу смежности.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	0

5 Вычислим степени вершин:

$$\rho_1(1) = 0$$

$$\rho_2(1) = 2$$

$$\rho_1(2) = 2$$

$$\rho_2(2) = 1$$

$$\rho_1(3) = 0$$

$$\rho_2(3) = 1$$

$$\rho_1(4) = 2$$

$$\rho_2(4) = 0$$

$$\rho_1(5) = 0$$

$$\rho_2(5) = 2$$

$$\rho_1(6) = 2$$

$$\rho_2(6) = 0$$

$$\rho_1(1) + \rho_1(2) + \rho_1(3) + \rho_1(4) + \rho_1(5) + \rho_1(6) = 6$$

$$\rho_2(1) + \rho_2(2) + \rho_2(3) + \rho_2(4) + \rho_2(5) + \rho_2(6) = 6$$

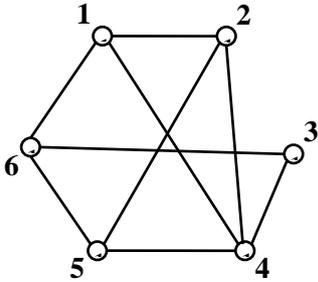
$$q = 6(\text{ребер } 6)$$

Задания к практической работе.

1 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4);$
 $(4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)\}$

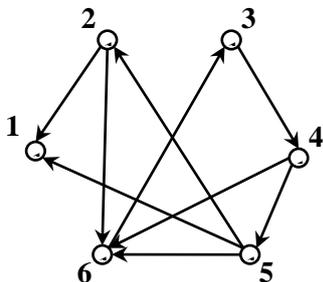
2



3 Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)\}$

4



5

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0

6 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (3; 1); (3; 6);$
 $(4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 1)\}$

7

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0	1

8

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	0
5	1	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	0

9 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

10 Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6);$
 $(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

11

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	-1	0	0	1	1	0	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0
6	0	1	0	0	1	0	-1	0	-1

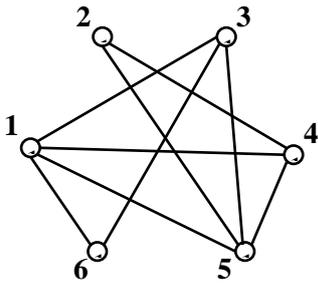
12 ΟργραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 5); (1; 6); (2; 1); (3; 2); (3; 4);
(4; 2); (5; 4); (5; 3); (6; 3)}

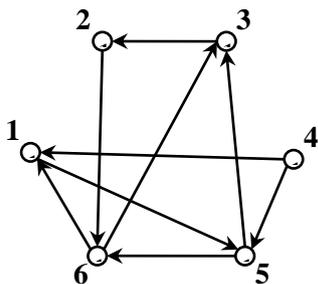
13

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	-1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
6	0	1	0	0	1	-1	0	0	0

14



15



16 ΗεοραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 3); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (3; 4);
(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

17 ΟργραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 2); (1; 5); (2; 6); (2; 3); (3; 4);
(4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 3)}

18

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

19 ΟργραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 6); (1; 5); (2; 1); (2; 4); (3; 5);
(4; 1); (4; 6); (5; 6); (6; 3)}

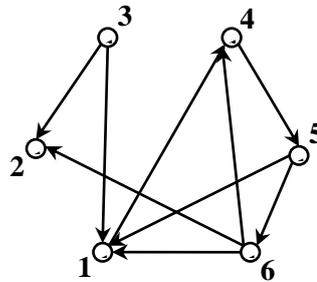
20 ΗεοραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6);
(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

21

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	1	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1	-1	0	0

22



23 ΟργραφV = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

E = {(1; 3); (1; 6); (2; 3); (3; 4); (3; 6);

(4; 2); (4; 5); (5; 1); (6; 2)}

24 $\text{Νεογραφ}\Phi V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

30 $\text{Οργρα}\Phi V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

25 $\text{Οργρα}\Phi V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$

31

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	1
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1
4	0	1	1	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1	0

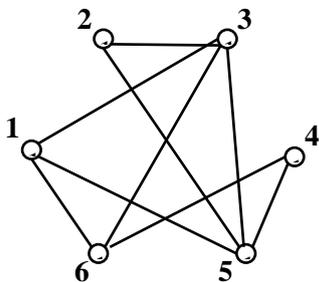
26

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	1	0	0

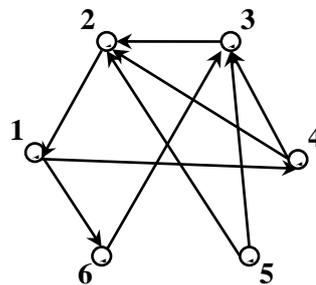
32

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	1	0
4	1	1	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0

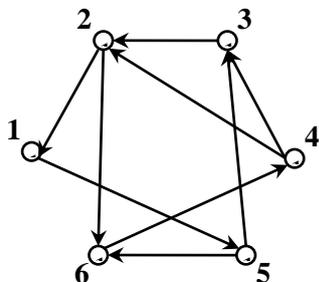
27



33



28



29 $\text{Νεογραφ}\Phi V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 3

Тема занятия: *Графы. Способы задания графов. Степени вершин.*

Цель выполнения задания: *научиться задавать граф различными способами и вычислять степени вершин.*

Необходимо знать: *основные понятия, формулы и правила теории графов*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила теории графов*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое граф? 2 Что такое инцидентное ребро или инцидентная вершина? 3 Что такое петля? 4 Какое ребро называется ориентированным? 5 Что такое кратные ребра? 6 Что такое неграф? 7 Что такое орграф? 8 Какие вершины называются смежными? 9 Что такое конечный граф? 10 Что такое пустой граф? 11 Что такое полный граф? 12 Что такое локальная степень вершины? 13 Лемма о рукопожатиях. 14 Как связаны степени вершин в орграфе? 15 Какие графы называются равными? 16 Что такое изоморфные графы? 17 Способы задания графов. 18 Что такое матрица смежности? 19 Что такое матрица инцидентности? 20 Что такое маршрут? 21 Что такое цикл? 22 Что такое цепь? 23 Что такое путь? 24 Что такое*

связные вершины? 25 Что такое связный граф? 26 Что такое плоский граф? 27 Что такое изолированные вершины? 28 Что такое дерево?

Литература:

1 *<http://cyberfac.ru>*

2 *<http://www.matburo.ru>*

3 *<http://www.toehelp.ru>*