

Практическая работа № 5

Вычисление интегралов методом интегрирования по частям.

Цель работы: научиться находить интегралы методом интегрирования по частям.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Суть метода интегрирования по частям в следующем: если подынтегральная функция может быть представлена в виде произведения двух непрерывных функций (каждая из которых может быть как элементарной функцией, так и композицией), то для неопределённого интеграла:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ для определённого: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

2 Идея метода замены состоит в том, чтобы сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой. После того, как подобрали замену, нужно найти дифференциал этой переменной, выразить дифференциал исходной переменной через новую переменную и в интеграле перейти от начальной переменной к новой, после вычисления интеграла, вернуться к исходной переменной

3 Основные формулы интегрирования:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1),$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, (x \neq 0),$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C, (-\operatorname{arccos} x + C), (|x| < 1),$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C,$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
- $\int \cos x dx = \sin x + C,$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C (x \neq \pi/2 + \pi n),$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C (x \neq \pi n),$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = 1/(2a) \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, (|x| \neq a),$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, (|x| > a),$

4 Основные формулы нахождения производных и правила дифференцирования:

- (1) $c' = 0$
 - (2) $(kx+b)' = k$
 - (3) $(x^n)' = nx^{n-1}$
 - (4) $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$
 - (5) $(1/x)' = -1/x^2$
 - (6) $(a^x)' = a^x \ln a$
 - (7) $(e^x)' = e^x$
 - (8) $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$
 - (9) $(\sin x)' = \cos x$
 - (10) $(\cos x)' = -\sin x$
 - (11) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$
 - (12) $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$
 - (13) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$
 - (14) $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$
 - (15) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$
 - (16) $(\operatorname{arccctg} x)' = -1/(1+x^2)$
-
- (17) $(cu)' = cu'$; (18) $(u+v)' = u'+v'$
 - (19) $(uv)' = u'v+uv'$; (20) $(u/v)' = (u'v-uv')/v^2$
 - (21) $(uvw)' = u'vw+uv'w+uvw'$
 - (22) $(f(g(x)))' = f'_g g'_x$

Задание

Исходные данные:

1 Вычислите неопределенный интеграл $\int x^2 \sin x dx$

Решение:

Для вычисления данного интеграла необходимо использовать способ интегрирования по частям, для этого через u обозначим x^2 , чтобы при дифференцировании функция упростилась:

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x - \left(-\int 2x \cos x dx \right) =$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx =$$

Мы добились понижения степени x , но для вычисления интеграла надо применить интегрирование по частям еще раз:

$$= \left. \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2x \sin x -$$

$$- 2 \int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2(-\cos x) + C =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Ответ: $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

2 Вычислите неопределенный интеграл $\int x^3 \cos x^2 dx$

Для нахождения интеграла необходимо понизить степень x , для этого сначала нужно ввести замену переменных:

$$\int x^3 \cos x^2 dx = \left. \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t \cos t dt =$$

Теперь вычисление интеграла можно легко провести методом интегрирования по частям:

$$= \int t \cos t dt = \left. \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = \cos t dt; \quad v = \sin t \end{array} \right| = t \sin t - \int \sin t dt =$$

$$= t \sin t + \cos t + C =$$

Осталось только вернуться к исходной переменной x :

$$= t \sin t + \cos t + C = x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$$

Ответ: $\int x^3 \cos x^2 dx = x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$

Задания к практической работе.

1 $\int \arcsin x dx$

2 $\int x \ln 3x dx$

3 $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$

4 $\int x^2 \cos x dx$

5 $\int x \operatorname{arctg} x dx$

6 $\int x^3 \sin x^2 dx$

7 $\int \ln^2 x dx$

8 $\int x^2 \sin x dx$

9 $\int (x + 2) \sin 5x dx$

10 $\int \frac{x dx}{\sin^2 3x}$

11 $\int \ln x dx$

12 $\int (x + 1) \cos 3x dx$

13 $\int x \sin x dx$

14 $\int x \cos x dx$

15 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

16 $\int x^2 e^x dx$

17 $\int \ln \frac{x}{2} dx$

18 $\int (x + 1) e^x dx$

19 $\int x \cos 3x dx$

20 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

21 $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

22 $\int x \ln x dx$

23 $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

24 $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$

25 $\int \frac{x dx}{\cos^2 5x}$

26 $\int x \sin 2x dx$

27 $\int x \operatorname{arctg} 4x dx$

28 $\int x \cos \frac{x}{3} dx$

29 $\int (3x - 5) \ln x dx$

30 $\int \ln 7x dx$

31 $\int (2x + 3) \ln 4x dx$

32 $\int (x - 2) e^{3x} dx$

33 $\int x \sin \frac{x}{5} dx$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 5

Тема занятия: *вычисление интегралов методом интегрирования по частям*

Цель выполнения задания: *научиться находить интегралы методом интегрирования по частям*

Необходимо знать: *основные формулы и правила интегрирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила интегрирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: 1 *Формула вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.* 2 *Формула вычисления определенного интеграла методом интегрирования по частям.* 3 *Как выбрать шаг при использовании метода интегрирования по частям?* 4 *Как найти производную суммы двух функций?* 5 *Как найти производную произведения двух функций??* 6 *Как найти производную частного двух функций??* 7 *Как найти производную сложной функции?* 8 *В чем заключается суть метода замены переменной при вычислении интегралов?*

Литература:

- 1 *Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1*
- 2 *И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003*
- 3 *Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006*
- 4 *В.С. Шупачев Задачник по высшей математике –М 2001*
- 4 *<http://mvm-math.narod.ru>*
- 5 *<http://www.pm298.ru>*
- 6 *<http://www.fxyz.ru>*
- 7 *<http://old.college.ru>*