Практическая работа № 6

Нахождение частных производных и полного дифференциала функции.

Цель работы: научиться находить частные производные и полный дифференциал функции.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Функция двух переменных обычно записывается как $z = f(x, y)$, при этом переменные x, y называются *независимыми переменными* или *аргументами*. Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных. Иногда используют запись $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

2 Ч*астной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) называют предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если он существует.Частную производную по x обозначают одним из следующих символов:

$$z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Аналогично определяется частная производная по y и вводятся ее обозначения.Частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано.

3 Полный дифференциал функции $f(x, y, z, ...)$ нескольких независимых переменных — выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ...$$

4 Частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной, когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).

(1) $c' = 0$
(2) $(kx+b)' = k$
(3) $(x^n)' = nx^{n-1}$
(4) $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$
(5) $(1/x)' = -1/x^2$
(6) $(a^x)' = a^x \ln a$
(7) $(e^x)' = e^x$
(8) $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$
(9) $(\sin x)' = \cos x$
(10) $(\cos x)' = -\sin x$
(11) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$
(12) $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$
(13) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$
(14) $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$
(15) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$
(16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$

(17) $(cu)' = cu'$; (18) $(u+v)' = u'+v'$
(19) $(uv)' = u'v+uv'$; (20) $(u/v)' = (u'v-uv')/v^2$
(21) $(uvw)' = u'vw+uv'w+uvw'$
(22) $(f(g(x)))' = f'_g\, g'_x$

Задание

Исходные данные:

1Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

Решение:

а) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$,при этом y считаем константой и выносим за знак производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 4\sqrt{y}$$

б) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial y}$,теперь$x$ считаем константой и выносим за знак производной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{4x}{2\sqrt{y}} - 6 \cdot 2y = x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y$$

в) Запишем dz:

$$dz = \left(2xy - 4\sqrt{y}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y\right)dy$$

2 Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

а) Вычислим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,используя правило дифференцирования сложной функции, при этом y считаем константой:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

б) Вычислим $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,теперь x считаем константой:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в) Запишем dz:

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Задания к практической работе.

1 $\sqrt{3y}\log_3 x+\sin(2x+3y)$	2 $\dfrac{x}{\sin y}+\sqrt{2x}\ln y$	3 $\dfrac{\log_2(3x)}{2y}$
4 $3arctg(x^2\cdot y^2)$	5 $\sqrt{3y}\ln x+\sin(2x+3y)$	6 $\arcsin(2x^2\cdot y^2)$
7 $\sin(2x^2+3y^2)$	8 $\dfrac{arctg(3x\cdot y^2)}{3}$	9 $\log_2(3x+2y^2)$
10 $\dfrac{tg(2x^3+y^3)}{3}$	11 $4arctg(x^2\cdot y)$	12 $\dfrac{arctg(x\cdot y)}{3}$
13 $\dfrac{y}{\cos x}+\sqrt{2y}\ln x$	14 $\dfrac{y}{\sin x}+\sqrt{5y}\ln x$	15 $\dfrac{\log_3(5y)}{3x}$
16 $\dfrac{tg(2x^2+3y^2)}{2}$	17 $\dfrac{\sin x}{\cos y}+\sqrt{3x}e^{2y}$	18 $\dfrac{\sin y}{\cos 2x}+\sqrt{x}e^{2y}$
19 $\sqrt{3y}3^x+\sin(5x-2y)$	20 $\dfrac{ctg(3x^2+2y^2)}{2}$	21 $\sqrt{3y}2^{3x}+\cos(3x-4y)$
22 $y^2\arccos(xy)$	23 $\dfrac{\ln(5xy)}{3x}$	24 $x^2\arcsin(xy)$
25 $y^2\arcsin(xy)$	26 $x^2\arccos(xy)$	27 $\sqrt{2y}\cdot 2^{3x}+\ln(3x-4y)$
28 $\sqrt{2x}\cdot 2^{3y}+\ln(3x+2y)$	29 $\log_7(3x^2+2y^3)$	30 $\dfrac{\log_7(3x)}{5y}$
31 $\log_5(3x^2-4y^3)$	32 $\sqrt{3x}\cdot 2^{2y}+\ln(3x+5y)$	33 $\dfrac{x}{\cos y}+\sqrt{2x}\ln y$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 6

Тема занятия: *нахождение частных производныхи полного дифференциала функции*

Цель выполнения задания: научиться находить частные производные и полный дифференциал функции.

Необходимо знать: *основные формулы и правила дифференцирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила дифференцирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;* - *изучить схему решения задач;* - *выполнить задания практической работы;* - *сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое функция нескольких переменных? 2 Что такое частная производная? 3 Как обозначается частная производная? 4 Что такое полный дифференциал функции?5Как найти частную производную?6Как в нахождении частной производной используются правила и формулы дифференцирования?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://dic.academic.ru

5 http://vm.psati.ru

6 http://www.academiaxxi.ru

7 http://www.mathprofi.ru

8 http://www.allmath.ru

9 http://ru.wikipedia.org