

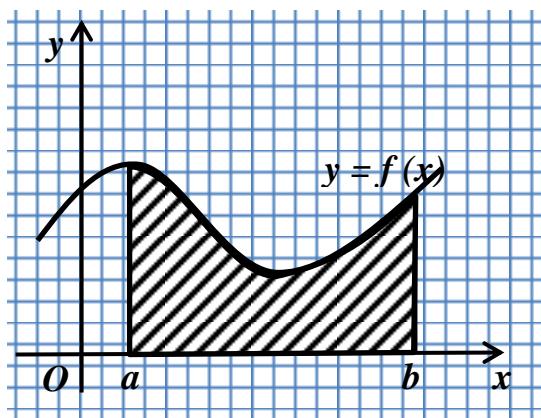
Практическая работа № 7

Применение определенных интегралов для вычисления площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения.

Цель работы: научиться вычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения.

Содержание работы.

Основные понятия.

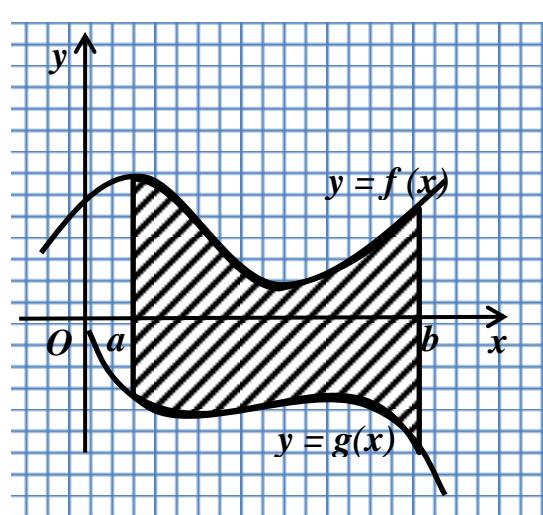


1 Фигура, ограниченная графиком непрерывной, знакопостоянной функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$, называется криволинейной трапецией.

2 Если $f(x)$ непрерывная и неотрицательная функция на отрезке $[a;b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразных. $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная $f(x)$.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3 Если криволинейная трапеция расположена под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой $y=f(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, то площадь находится по формуле

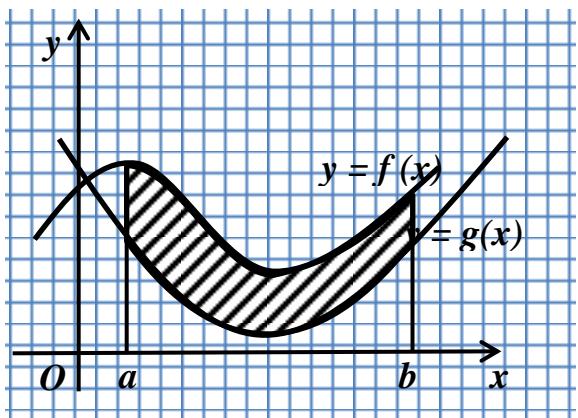


$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = |F(b) - F(a)|$$

4 Фигура расположена над и под осью Ох и ограничена кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, тогда

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| + \left| \int_a^b g(x)dx \right|$$

5 Площадь ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$



$(f(x) > g(x))$, тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

где a и b – точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$

6 Тело, полученное в результате вращения плоской фигуры, относительно какой-то оси, называют фигурой вращения.

7 Если на плоскости Oxy кривую, заданную уравнением $y=f(x)$, где $a \leq x \leq b$, где $f(x)$ непрерывна и неотрицательна вращать вокруг оси x , то

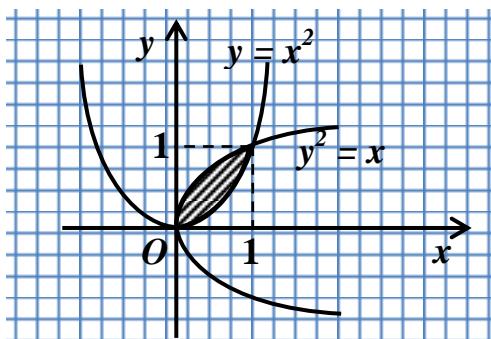
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Задание

Исходные данные:

1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$; $y^2 = x$.

Решение:



а) Найдем точки пересечения графиков заданных функций:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = x^4 \\ x^4 - x = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} x(x^3 - 1) = 0 \\ x_1 = 0; x_2 = 1 \end{array} \right.$$

б) Вычислим S фигуры, как разность интегралов функций $y = x^2$; $y^2 = x$: $y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

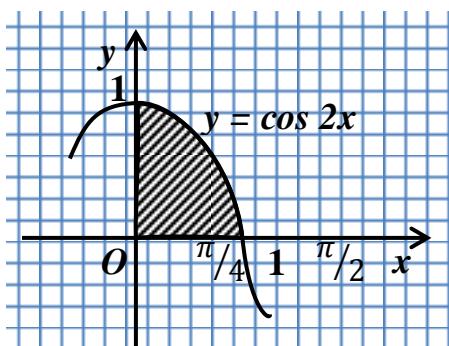
Наша площадь находится выше оси Oy , значит $y = \sqrt{x}$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2x\sqrt{x} - x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $S = \frac{1}{3}$

2 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos 2x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ вокруг оси Ох.

Решение:



a) Построим линию $y = \cos 2x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

б) Вычислим V фигуры по формуле:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi - 0 \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Ответ: $V = \frac{\pi^2}{8}$

Задания к практической работе.

$$1 \quad V - ? \quad y = e^x; \\ x = 0; x = 1; y = 0$$

$$2 \quad y = 8 + 2x - x^2 \\ y = x + 6$$

$$3 \quad y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3$$

$$4 \quad y^2 = 4x \\ x^2 = 4y$$

$$5 \quad x - 2y + 4 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \text{ и } y = 0$$

$$6 \quad y = 2x^2 - 1 \\ y = x^2$$

$$7 \quad x + y - 5 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \text{ и } y = 0$$

$$8 \quad y = -x^2 - 1 \\ x = 1; x = 4; y = 0$$

$$9 \quad y = \frac{1}{x}; y = x^2 \\ 1 \leq x \leq e$$

$$10 \quad y = x^2 - 6x \\ y = 0$$

$$11 \quad y = x^2 + 6x + 5 \\ y = 0$$

$$12 \quad xy = 6 \\ x + y - 7 = 0$$

$$13 \quad y = -x^2 - 4 \\ y = 0$$

$$14 \quad y = 4x - x^2 \\ x = 5; y = 0$$

$$15 \quad y^2 = 9x \\ x^2 = 9y$$

$$16 \quad y = e^{-x}; y = e^x; \\ x = 0; x = 1$$

$$17 \quad y = x^2 - 4 \\ y = x^2$$

$$18 \quad y = 2 \sin x; y = 0 \\ x = 0; x = \frac{\pi}{2}$$

$$19 \quad y = 3 \cos x; y = 0 \\ x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$$

$$20 \quad y = \frac{1}{2}x^3; y = 0 \\ x = 0; x = 4$$

$$21 \quad y = \sin x; y = 0 \\ x = -\pi; x = \pi$$

$$22 \quad V - ? \quad y = x^2 + 1; \\ x = 1; x = 2; y = 0$$

$$23 \quad V - ? \quad y = x^3; \\ x = 0; x = 2; y = 0$$

$$24 \quad V - ? \quad y = 4x - x^2; \\ y = 0$$

$$25 \quad y = 1 + \sin x; y = 0 \\ x = 0; x = 2\pi$$

$$26 \quad V - ? \quad y = \frac{4}{x}; \\ x = 1; x = 4; y = 0$$

$$27 \quad V - ? \quad y = 2x - x^2; \\ y = 0$$

$$28 \quad V - ? \quad y = \sin x; \\ x = 0; x = \pi; y = 0$$

$$29 \quad y = \frac{1}{x}; x = 1 \\ x = 3; y = 0$$

$$30 \quad y = 2 \cos x; y = 0 \\ x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$$

$$31 \quad y = x^2 - 6x \\ y = 0$$

$$32 \quad y = x^2 + 6x + 5 \\ y = 0$$

$$33 \quad xy = 6 \\ x + y - 7 = 0$$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 7

Тема занятия: *Применение определенных интегралов для вычисления площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения*

Цель выполнения задания: *научиться вычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения*

Необходимо знать: *основные формулы и правила интегрирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила интегрирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: 1 Что такое криволинейная трапеция? 2 Что такое фигура вращения? 3 Как вычислить площадь криволинейной трапеции? 4 Формула площади фигуры, расположенной ниже оси Ox . 5 Формула площади фигуры, расположенной как выше, так и ниже оси Ox . 6 Формула площади фигуры, расположенной между графиками двух функций. 7 Формула объема тела вращения.

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
- 4 <http://works.tarefer.ru>
- 5 <http://festival.1september.ru>