

Практическая работа № 8

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

2 Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

3 Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

4 Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных

5 Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x , искомой функцией y и её производной

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

6 Если уравнение может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

7 Дифференциальные уравнения $f(y) dy = g(x) dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

8 Линейное уравнение первого порядка – это уравнение вида:
 $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

9 Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Задание

Исходные данные:

Решить дифференциальное уравнение $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

Решение:

а) Решим уравнение методом вариации постоянных (методом Лагранжа):

– найдем общее решение однородного уравнения

$$y' \cos^2 x + y = 0$$

$$y' \cos^2 x = -y; \quad \frac{dy}{dx} \cos^2 x = -y;$$

$$dy \cos^2 x = -y dx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \ln|y| = -\operatorname{tg} x + C$$

$$y = e^{-\operatorname{tg} x + C}; \quad y = e^{-\operatorname{tg} x} e^C; \quad y = C e^{-\operatorname{tg} x}$$

– теперь полагаем $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$; $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$, подставляем y и

y' в исходное уравнение: $C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x - C(x)\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x; \quad C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int t e^t dt = \left| \begin{array}{l} u = t; du = dt \\ dv = e^t dt; v = e^t \end{array} \right| =$$

$$t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-\operatorname{tg} x} (e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C) = \operatorname{tg} x - 1 + C e^{-\operatorname{tg} x}$$

б) Решим это уравнение методом подстановки (методом Бернулли):

– для этого представим $y = u(x) \cdot v(x)$; $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

– подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)v'(x)\cos^2 x + u(x) \cdot v(x) = \operatorname{tg} x$$

$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x) \cdot (v'(x)\cos^2 x + v(x)) = \operatorname{tg} x$$

– найдем частное решение уравнения:

$$v'(x)\cos^2 x + v(x) = 0; \quad v'(x) = -\frac{v(x)}{\cos^2 x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\ln|v| = -tgx; \quad v = e^{-tgx}$$

– найдем общее решение уравнения:

$$u'(x)v(x)\cos^2 x = tgx; \quad u'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx$$

$$u(x) = \int \frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int te^t dt = \left| \begin{array}{l} u = t; du = dt \\ dv = e^t dt; v = e^t \end{array} \right| =$$

$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

– находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = e^{-tgx}(e^{tgx}(tgx - 1) + C) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

Ответ: $y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$

Задания к практической работе.

1 $y' = x + y$

2 $xy' - y = x^2 \cos x$

3 $y' = x + \frac{y}{x} - y$

4 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

5 $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$

6 $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

7 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

8 $xy' + 2y = x^3$

9 $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

10 $xy' + y - 2x = 0$

11 $y' + x^2 y = x^2$

12 $xy' + y = 3$

13 $y' \sin x - y \cos x = 1$

14 $(1 + x^2)y' - xy = 2x$

15 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

16 $y' + y \cos x = \sin 2x$

17 $xy' + y = \ln x + 1$

18 $xy' - 2y = 3x^5$

19 $y' + x^2 y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$

20 $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x$

21 $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$

22 $y' + 5x^4 y = -10x^9$

23 $y' - \frac{y}{x} = x$

24 $xy' + y - 4x = 0$

25 $y' + 2y \operatorname{tg} x = \cos^4 x$

26 $y' - y = e^x$

27 $xy' + y - 2x = 0$

28 $xy' - 2y = 3x^5$

29 $y' + 5x^4 y = -10x^9$

30 $y' + x^2 y = x^2$

31 $y' + y \cos x = \sin 2x$

32 $xy' + y = \ln x + 1$

33 $xy' - 2y = 3x^5$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 8

Тема занятия: *Решение дифференциальных уравнений первого порядка*

Цель выполнения задания: *научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка*

Необходимо знать: *основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений первого порядка*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений первого порядка*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: 1 Что такое дифференциальное уравнение?
2 Что такое порядок дифференциального уравнения? 3 Что такое общее решение дифференциального уравнения? 4 Что такое частное решение дифференциального уравнения? 5 Что такое линейное дифференциальное уравнение?
6 Что такое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными?
7 Что такое линейное однородное дифференциальное уравнение? 8 Что такое неоднородное линейное дифференциальное уравнение?

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
- 4 <http://ru.wikipedia.org>
- 5 <http://www.mathprofi.ru>
- 6 <http://fmf.bigpi.biysk.ru>
- 7 <http://www.cleverstudents.ru>
- 8 <http://slovari.yandex.ru>