Практическая работа № 9

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Цель работы: решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Уравнение вида $y''+\rho y'+qy=f(x)$, где ρ и q – вещественные числа, $f(x)$ – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

2 Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида: $y''+\rho y'+qy=0$, у которого правая часть $f(x)$ равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

3 Уравнение $K^2+\rho K+q=0$ называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения.

4 Характеристическое уравнение является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через K_1 и K_2. Общее решение дифференциального уравнения может быть записано в зависимости от величины дискриминанта $D=\rho^2-4q$ характеристического уравнения следующим образом:

– При $D>0$ корни характеристического уравнения вещественные и различные ($K_1 \neq K_2$), и общее решение имеет вид .

– При $D=0$ корни характеристического уравнения вещественные и равные ($K_1=K_2=K$), и общее решение имеет вид:

– Если $D<0$, то корни характеристического уравнения комплексные: , где – мнимая единица, и общее решение ($K_1=\alpha+\beta i$, $K_2=\alpha-\beta i$, $\beta\neq 0$), имеет вид $y=e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x+C_2 \sin\beta x)$.

Задание

Исходные данные:

1 Найти частное решение дифференциального уравнения $2y''-5y'+2y=0$, при y (0) =1; y' (0) = 0.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$2k^2 - 5k + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad k_1 = 2; \quad k_2 = \frac{1}{2}$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y':

$y' = 2C_1 e^{2x} + \frac{C_2}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad C_1 = 1 - C_2$

$y'(0) = 2C_1 + \frac{C_2}{2} = 0; \quad 2 - 2C_2 + \frac{C_2}{2} = 0$

$4 - 4C_2 + C_2 = 0; \quad 3C_2 = 4; \quad C_2 = \frac{4}{3}; \quad C_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

Ответ: $y = -\frac{1}{3} e^{2x} + \frac{4}{3} e^{\frac{x}{2}}$

2 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$, при y (0) =1; y' (0) = 0.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$k^2 - 8k + 16 = 0$

$D = 64 - 64 = 0$

$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y':

$y' = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

$y(0) = C_1 = 1;$

$y'(0) = 4C_1 + C_2 = 0; \quad 4 + C_2 = 0; \quad C_2 = -4$

Ответ: $y = e^{4x}(1 - 4x)$

3 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 8y' + 25y = 0$, при y (0) =1; y' (0) = 0.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 8k + 25 = 0$$

$$D = 64 - 100 = -36$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y':

$$y' = -4e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3e^{-4x}(-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) =$$

$$= e^{-4x}(C_1(-4\cos 3x - 3\sin 3x) + C_2(-4\sin 3x + 3\cos 3x))$$

$$y(0) = C_1 = 1; \quad y'(0) = -4C_1 + 3C_2 = 0; \quad -4 + 3C_2 = 0; \quad 3C_2 = 4; \quad C_2 = \frac{4}{3}$$

Ответ: $y = e^{-4x}(\cos 3x + \frac{4}{3}\sin 3x)$

Задания к практической работе.

1 $y''+4y'+5y=0$,
при y (0) = – 3; y' (0) = 0

2 $y''+2y'+2y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 1

3 $y''-y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

4 $y''+25y'=0$,
при y (1) =20; y' (1) = 10

5 $y''-12y'+35y=0$,
при y (1) = 10; y' (1) = 2

6 $y''-2y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 8

7 $y''-3y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

8 $y''+4y'-5y=0$,
при y (0) = – 3; y' (0) = 0

9 $y''+3y'+2y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 1

10 $y''+3y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 6

11 $y''+25y=0$,
при y (0) =10; y' (0) = 10

12 $y''-4y'+4y=0$,
при y (0) = 4; y' (0) = 2

13 $y''-4y'+13y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 12

14 $y''-5y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

15 $y''+5y'+6y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = – 6

16 $y''-10y'+25y=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

17 $y''-4y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 8

18 $y''+9y'=0$,
при y (1) = 1; y' (1) = – 6

19 $y''-y'-2y=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 3

20 $y''-7y'+6y=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 5

21 $y''-7y'=0$,
при y (0) = 3; y' (0) = 14

22 $y''+6y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 3

23 $y''+6y'+10y=0$,
при y (0) = 2; y' (0) = 1

24 $y''-8y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 8

25 $2y''-y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

26 $y''-8y'+16y=0$,
при y (0) = 2; y' (0) = 5

27 $y''-9y'+20y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 7

28 $4y''-y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 8

29 $5y''+y'=0$,
при y (0) =1; y' (0) = 1

30 $y''+3y'-10y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 1

31 $y''+4y'+5y=0$,
при y (0) = – 3; y' (0) = 0

32 $y''+2y'+2y=0$,
при y (0) = 1; y' (0) = 1

33 $y''-y'=0$,
при y (0) = 0; y' (0) = 1

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 9

Тема занятия: *Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка*

Цель выполнения задания: *научиться решать однородные дифференциальные уравнения второго порядка*

Необходимо знать: *основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения однородных линейных уравнений второго порядка*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений второго порядка*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое линейное дифференциальное уравнение второго порядка? 2 Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением? 3 Что такое характеристическое уравнение? 4 Как связано общее решение однородного дифференциального уравнения с корнями характеристического уравнения?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://math.immf.ru/lections/009.html

5 http://www.cleverstudents.ru/

6 http://rudocs.exdat.com/