Практическая работа № 10

Сходимость числовых рядов с положительными членами.

Цель работы: исследование числового ряда на сходимость.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Сумма членов бесконечной числовой последовательности называется числовым рядом.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

При этом числа a_1; a_2; a_3 ... будем называть членами ряда, а a_n – общим членом ряда.

2 Суммы $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются частными (частичными) суммами ряда. Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

3 Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частных сумм. Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частных сумм.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

4 Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется расходящимся и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

5 Свойства рядов:

а) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

б) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, где C – постоянное число. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд тоже $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)

в) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Суммой или разностью этих рядов будет называться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S_1 и S_2, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S_1 + S_2$.

г) Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

д) Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

е) О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

6 Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член a_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится.

7 Признак сравнения рядов с неотрицательными членами: Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n, b_n \geq 0$. Если $a_n \leq b_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

8 Предельный признак Даламбера: Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то при $p < 1$ ряд сходится, а при $p > 1$ – расходится. Если $p = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

9 Признак Коши. (радикальный признак): Если для ряда с неотрицательными членами существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при q<1 ряд сходится, а при q>1 ряд расходится.

Задание

Исходные данные:

1 Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n=\frac{n}{2^n};\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2\cdot 2^n n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1}=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ряд сходится

2 Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Решение:

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)=\frac{2}{3}<1\Rightarrow \text{ ряд сходится}$$

3 Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+19}}$.

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения:

$$n^5+19>n^5\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n^5+19}}<\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+19}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ *сходится, т.к.* $\frac{5}{2}>1\Rightarrow$

исходный ряд сходится

Задания к практической работе.

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^2-4}}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5}{2^n}$	3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2(n-3)}}$	5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n)!}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+21}\right)^n$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n-4}}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n-9)}}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3-27}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+6}{6^n}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4(n-1)}}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{3^n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{7^n}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n!}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n\ (n-2)}}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(4n)!}$
31	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n$	32	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5-7}}$	33	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3}{3^n}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 10

Тема занятия: *сходимость числовых рядов с положительными членами.*

Цель выполнения задания: *исследование числового ряда на сходимость*

Необходимо знать: *основные формулы и признаки сравнения числовых рядов с положительными членами*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и и признаки сравнения числовых рядов с положительными членами*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое числовой ряд? 2 Что называется частичной суммой ряда? 3 Какой ряд называется сходящимся? 4 Какой ряд называется расходящимся? 5 Свойства числовых рядов. 6 Необходимое условие сходимости ряда. 7 Является ли необходимое условие сходимости достаточным? 8 В чем заключается признак сравнения сходимости ряда? 9 Признак Даламбера сходимости числового ряда. 10 Радикальный признак Коши сходимости*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 http://ru.wikipedia.org

4 http://www.cleverstudents.ru/numerical_series.html

5 http://rudocs.exdat.com/