

Практическая работа № 12

Разложение функции в ряд Фурье

Цель работы: научиться раскладывать функцию в ряд Фурье.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов.

2 Стандартная запись разложения функции в ряд Фурье через сумму $\sin x$ и $\cos x$:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ - действительные константы.

3 Для диапазона от $-\pi$ до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Коэффициенты a_0 , a_n и b_n называются коэффициентами Фурье, и если их можно найти, то ряд (1) называется рядом Фурье, соответствующим функции $f(x)$.

Задание

Исходные данные:

1 На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2x + 3$.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x + 3) dx = \frac{1}{2\pi} (x^2 + 3x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (\pi^2 + 3\pi - \pi^2 + 3\pi) = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x+3) \cos nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+3; \quad du = 2dx \\ dv = \cos nx \, dx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x+3}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi - \cos \pi) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x+3) \sin nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x+3; \quad du = 2dx \\ dv = \sin nx \, dx; \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2x+3}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2\pi+3}{\pi n} \cos \pi + \frac{-2\pi+3}{\pi n} \cos \pi = \frac{\cos \pi}{\pi n} (-2\pi-3-2\pi+3) =$$

$$= -\frac{4 \cos \pi}{n} = -\frac{4}{n} (-1)^n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n}$$

В результате получим $f(x) = 3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$

2 На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x \, dx \\ dv = \cos nx \, dx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin nx \, dx; \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{n^2} \cos n\pi + \frac{2}{n^2} \cos n\pi - \frac{2}{\pi n^3} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x \, dx \\ dv = \sin nx \, dx; \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos nx \, dx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{x}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^3} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

В результате получим $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Задания к практической работе.

На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию

1	$f(x) = 6x^2$	11	$f(x) = 5x$	21	$f(x) = 2x - 3$
2	$f(x) = x^3$	12	$f(x) = 2x^3$	22	$f(x) = 3 - 2x$
3	$f(x) = 3x^2$	13	$f(x) = x - 2$	23	$f(x) = 3x - 4$
4	$f(x) = 4x^3$	14	$f(x) = 2x - \pi$	24	$f(x) = x - 5$
5	$f(x) = x - 1$	15	$f(x) = 6x^3$	25	$f(x) = 2x - 3\pi$
6	$f(x) = x - \pi$	16	$f(x) = 3x - 2$	26	$f(x) = x + \pi$
7	$f(x) = x + 5\pi$	17	$f(x) = 3x - 2\pi$	27	$f(x) = 2x - 3$
8	$f(x) = 2x - 9$	18	$f(x) = 3x + 2$	28	$f(x) = 3x^3$
9	$f(x) = 3 - 4x$	19	$f(x) = x + 3\pi$	29	$f(x) = 3x - 1$
10	$f(x) = 3x - 4$	20	$f(x) = 2x^2$	30	$f(x) = x + \pi$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 12

Тема занятия: *разложение функции в ряд Фурье.*

Цель выполнения задания: *научиться раскладывать функцию в ряд Фурье.*

Необходимо знать: *основные формулы и правила разложения функций в ряд Фурье*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила разложения функций в ряд Фурье*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: 1 На основании какого предположения основывается разложение функции в ряд Фурье? 2 Формула разложения функции в ряд Фурье через сумму $\sin x$ и $\cos x$. 3 Как рассчитываются коэффициенты ряда Фурье?

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012
- 4 <http://ru.wikipedia.org>
- 5 <http://www.dpva.info/Guide/GuideMathematics/SeriesOfTaylorMaklorenFourier/FourierSeries/>
- 6 http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/razd13z1/par13_5z1.htm