

## Практическая работа № 8

### Решение задач линейного программирования графическим методом.

**Цель работы:** Научиться решать задачи линейного программирования графическим методом.

#### Содержание работы:

##### Основные понятия.

1 Математическое программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

2 В линейном программировании изучаются свойства решений линейных систем уравнений и неравенств с  $n$  переменными, называемых системами ограничений, следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & (i = 1; k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & (i = k + 1; m), \text{ где } a_{ij}; b_i - \text{ постоянные величины и } k \leq m \\ x_j \geq 0 & (j = 1; l, l \leq n) \end{cases}$$

3 Система ограничений образует область допустимых решений (область экономических возможностей). План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым.

4 Основной задачей линейного программирования (ОЗЛП) с  $n$  переменными называется задача о нахождении такого допустимого плана, который доставляет максимум (минимум) функции  $F = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j$ , называемой функцией прибыли (целевой функцией, показателем эффективности или критерием оптимальности).

5 Допустимый план, доставляющий максимум (минимум) целевой функции, называется оптимальным планом.

6 Целевая функция, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, система ограничений составляют математическую модель задачи — это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д.

7 Если  $x_j$  рассматривать как координаты точки, то система ограничений является пересечением конечного числа полуплоскостей, образующее многоугольную область, которую называют областью решений системы неравенств.

8 Область решений является выпуклой, но может быть неограниченной и даже пустой (если система неравенств противоречива)

9 Прямую, которая имеет с областью решений по крайней мере одну общую точку, притом так, что вся область лежит по одну сторону от этой прямой, называют опорной по отношению к этой области

### Пример выполнения:

#### Исходные данные:

Для производства компьютерных столов I-го и II-го видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида, заданы в следующей таблице:

Тип ресурса	Единица продукции I вида	Единица продукции II вида	Запас ресурса
Дерево	1	3	24
Пластик	4	1	24
Трудозатраты	3	2	23
Прибыль	200	300	

Требуется, решив задачу графическим методом, найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

#### Решение:

1 Составим математическую модель задачи.

Обозначим  $x$  – количество выпущенной продукции I вида;

$y$  – количество выпущенной продукции II вида,

тогда для изготовления  $x$  единиц продукции I вида и  $y$  единиц продукции II вида нам необходимо  $(x + 3y)$  м<sup>2</sup> дерева, но это количество дерева не должно превышать имеющийся запас ресурса, поэтому имеем неравенство  $(x + 3y) \leq 24$ . Аналогично по остальным типам ресурсов, т. о. систему ограничений можно записать, используя данные таблицы:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 24 \\ 4x + y \leq 24 \\ 3x + 2y \leq 23 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

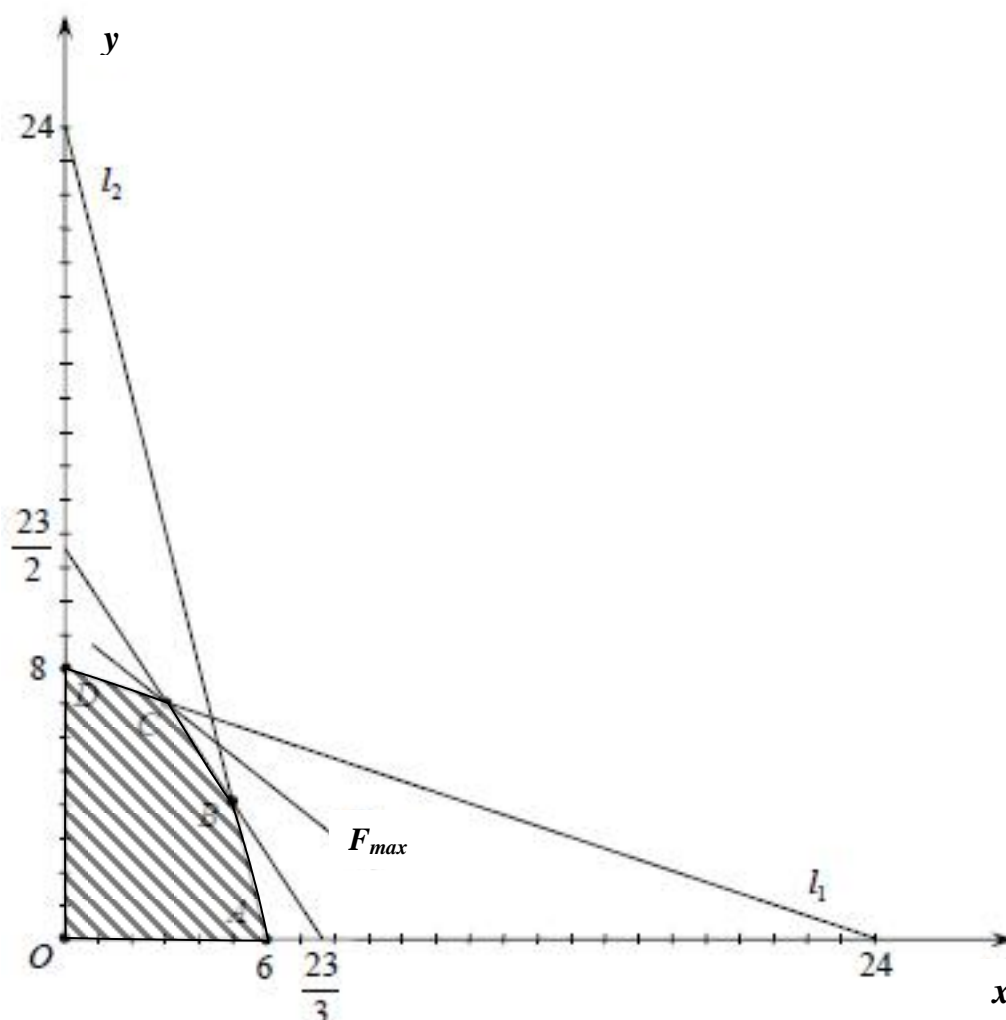
По условию задачи необходимо найти оптимальный план производства продукции, т.е. такой план  $(x, y)$ , который доставляет максимум функции прибыли

$$F = 200x + 300y.$$

## 2 Найдем область решений задачи

Для того чтобы решить поставленную задачу графическим методом, изобразим на координатной плоскости область, заданную системой ограничений. Это многоугольник лежит в первом координатном углу координатной плоскости, а его граница задается системой уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 24 \\ 4x + y = 24 \\ 3x + 2y = 23 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Многоугольник  $ABCD O$  — область решений системы ограничений.

## 3 Построим график целевой функции.

Для этого рассмотрим вектор  $\vec{N} = (2; 3)$  с началом в точке  $O (0; 0)$ , параллельный вектору  $(200; 300)$ , нормальному прямой  $200x + 300y = 0$ . Построим

линию нулевого уровня прибыли  $F = 0$ , т.е. прямую  $200x + 300y = 0$ . При движении этой прямой в положительном направлении вектора  $\bar{N}$  она пройдет через вершины области решений и станет опорной. В одной из вершин целевая функция примет наименьшее значение, в одной – наибольшее.

4 Найдем оптимальный план задачи.

Для этого найдем координаты вершин пятиугольника. Точка  $A$  – пересечение прямой  $4x + y = 24$  и оси  $Ox$ , ее координаты  $(6; 0)$ ,  $D$  – пересечение  $x + 3y = 24$  и оси  $Oy$ , ее координаты  $(0; 8)$ . Координаты точки  $B$  удовлетворяют системе уравнений  $\begin{cases} 4x + y = 24 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$  Решая эту систему, находим, что  $B = (5; 4)$ . Координаты точки  $C$  удовлетворяют системе уравнений  $\begin{cases} x + 3y = 24 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$  Решая эту систему

уравнений, находим, что  $C = (3; 7)$ .  $O = (0; 0)$ .

Подсчитаем теперь значения, которые принимает функция прибыли в вершинах пятиугольника:

$$F(O) = F(0; 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0;$$

$$F(A) = F(6; 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$$

$$F(B) = F(5; 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$$

$$F(C) = F(3; 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$$

$$F(D) = F(8; 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600.$$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается в точке  $C(3; 7)$ , и оптимальный план имеет вид  $(x, y) = (3; 7)$ .

**Ответ.** Наибольшая прибыль 2700 рублей достигается при выпуске 3-х компьютерных столов I-го вида и 7 компьютерных столов II-го вида.

## ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 8

**Тема занятия:** *графический метод решения задач линейного программирования.*

**Цель выполнения задания:** *решение задачи линейного программирования графическим методом.*

**Необходимо знать:** *основные понятия, формулы и правила линейного программирования*

**Необходимо уметь:** *применять основные формулы и правила линейного программирования*

**Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение):** *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

**Компьютерные программы:** *Компьютерные программы не используются*

**Теория:** *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

**Порядок выполнения задания, методические указания:** *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

**Дополнительные задания:** *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

**Содержание отчета:** *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

**Контрольные вопросы:** *1 Что такое математическое программирование? 2 Что такое линейное программирование? 3 Что такое область допустимых решений? 4 Что называется допустимый план? 5 В чем заключается основная задача линейного программирования? 6 Что такое целевая функция? 7 Что называется оптимальным планом? 8 Что такое математическая модель задачи? 9 Геометрическое представление области решения системы неравенств. 10 Что такое опорная прямая?*

**Литература:**

*1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга*

2 П.Е. Данко и др. *Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 частях, часть 1* 2008, -М, Мир и образование, Астрель, ОНИКС

3 <http://matmetod-popova.narod.ru/theme21.htm>

4 <http://ru.vlab.wikia.com>

5 <http://math.immf.ru/lectons/302.html>