Практическая работа № 9

Транспортная задача линейного программирования

Цель работы: создание математической модели транспортной задачи и определение опорного решения.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Условие транспортной задачи: однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, ... a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2 ... b_n. Известны $\mathbf{C_{ij}}$, i=1,2,...m; j=1,2,...n — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

2 Для того, чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т.е. задача должна быть с правильным балансом.

3 Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

4 Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, i=1,2,...,m j=1,2,...,n — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

6 Так как произведение $C_{ij}*X_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция задачи имеет вид: $F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$

7 Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью и име-

ет вид: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i=1;2;..m)$. Вторая группа из n уравнений выражает требование удовлетворить запросы всех n потребителей полностью и имеет вид: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j=1;2;..n)$

8 Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} F(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i=1;2;..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j=1;2;..n) \\ x_{ij} \ge 0 \ (i=1;2;..m;\ j=1;2;..n) \end{cases}$$

9 Исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы:

Поставщик	Потребитель				Запас
	1	2	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{21}	…	c_{21}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m1}	…	c_{m1}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Пример выполнения:

исходные данные:

У поставщиков A_1 , A_2 , A_3 , находится соответственно 70 , 80 , 110 единиц однотипной продукции, которая должна быть доставлена потребителям B_1 , B_2 , B_3 , B_4 в количестве 50 , 70 , 60 , 80 единиц соответственно. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_1 к указанным потребителям равна 14 , 16 , 13 , 7 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_2 к указанным потребителям равна 15 , 11 , 9 , 8 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_3 к указанным потребителям равна 12 , 17 , 18 , 16 ден.ед.

Требуется найти оптимальное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям, минимизирующие стоимость доставки.

Решение:

1 Составим математическую модель задачи в виде таблицы

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	16	13	7	70
A_2	15	11	9	8	80
A_3	12	17	18	16	110
Потребность	50	70	60	80	

2 Заполним таблицу, используя метод северо-западного угла:

Начнем с верхней левой ячейки $x_{11} = \min\{A_1; B_1\} = \min\{50; 70\} = 50$

$$x_{12} = \min\{A_1 – B_1; B_2\} = \min\{70 – 50; 70\} = 20$$

$$x_{13} = \min\{A_1 – B_1 – B_2; B_3\} = \min\{70 – 50 – 20; 70\} = 0$$

$$x_{21} = \min\{B_1 – A_1; A_2\} = \min\{50 – 70; 80\} = 0 \text{ и т. д.}$$

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	50 ^{14}	20 ^{16}	- ^{13}	- ^{7}	70
A_2	- ^{15}	50 ^{11}	30 ^{9}	- ^{8}	80
A_3	- ^{12}	- ^{17}	30 ^{18}	80 ^{16}	110
Потребность	50	70	60	80	

В результате заполнения таблицы сумма продукции в каждой строке должна быть равна запасу, а сумма продукции в каждой колонке должна быть равна потребности. Общие затраты на доставку всей продукции, для начального решения находим по формуле

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

F = 50 · 14 + 20 · 16 + 50 · 11 + 30 · 9 + 30 · 18 + 80 · 16 = 3660 (ден.ед.)

3 Составим опорный план, используя метод минимального элемента, в котором учитывают величину c_{ij}. В этом случае заполнение таблицы начинаем с ячейки с наименьшей стоимостью. Это ячейка (1; 4): $x_{14} = \min\{A_1; B_4\} = \min\{80; 70\} = 70$ Остатки по строке и столбцу выбираем в ячейках с наименьшей оставшейся стоимостью. Аналогично с оставшимися поставками

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0 ^{14}	0 ^{16}	0 ^{13}	70 ^{7}	70
A_2	0 ^{15}	10 ^{11}	60 ^{9}	10 ^{8}	80
A_3	50 ^{12}	60 ^{17}	0 ^{18}	0 ^{16}	110
Потребность	50	70	60	80	

F = 70 · 7 + 10 · 11 + 60 · 9 + 10 · 8 + 50 · 12 + 60 · 17 = 2840 (ден.ед.)

Применяя это правило, мы получили другой вариант исходного опорного решения, при котором сумма затрат стала меньше, т.е. ближе к оптимальному плану

Задания к практической работе.

1 У поставщиков A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , находится соответственно 200 , 400 , 250 , 150 единиц однотипной продукции, которая должна быть доставлена потребителям B_1 , B_2 , B_3 , B_4 в количестве 500 , 100 , 200 , 200 единиц соответственно. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_1 к указанным потребителям равна 9 , 23 , 21 , 19 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_2 к указанным потребителям равна 28 , 16 , 5 , 7 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_3 к указанным потребителям равна 7 , 15 , 4 , 5 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_4 к указанным потребителям равна 6 , 4 , 21 , 3 ден.ед. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки.

2 У поставщиков A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , находится соответственно 200 , 400 , 250 , 150 единиц однотипной продукции, которая должна быть доставлена потребителям B_1 , B_2 , B_3 , B_4 в количестве 500 , 100 , 200 , 200 единиц соответственно. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_1 к указанным потребителям равна 9 , 23 , 21 , 19 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_2 к указанным потребителям равна 28 , 16 , 5 , 7 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_3 к указанным потребителям равна 7 , 15 , 4 , 5 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A_4 к указанным потребителям равна 6 , 4 , 21 , 3 ден.ед. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки.

3 На складах А1, А2, А3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители В1, В2, В3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (усл. ед.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

4 Четыре предприятия для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах, и запасы его равны соответственно 160, 140 и 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта сосредоточения. Тарифы

перевозок заданы матрицей. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5 Три предприятия производят некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя в количествах, соответственно равных 30, 30 и 10 и 20 ед. Каждому потребителю продукция может завозиться с любого предприятия. Тарифы перевозок заданы матрицей. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

6 На три базы поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина в количествах, соответственно равных 140 и 110, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок заданы матрицей. Требуется найти опорное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям двумя способами, выбрать минимальную стоимость доставки

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 9

Тема занятия: *транспортная задача линейного программирования*

Цель выполнения задания: *создание математической модели транспортной задачи и определение опорного решения*

Необходимо знать: *основные понятия, формулы и правила решения транспортной задачи линейного программирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила решения транспортной задачи линейного программирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Формулировка транспортной задачи линейного программирования 2 Что такое опорное решение транспортной задачи? 3 Необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи 4 Как определяются переменные в транспортной задаче? 5 Определение целевой функции транспортной задачи 6 Математическая модель транспортной задачи 7 В чем суть метода северо-западного угла? 8 Как составить опорное решение транспортной задачи методом минимального элемента?*

Литература:

1 П.Е. Данко и др. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 частях, часть 1 2008, -М, Мир и образование, Астрель, ОНИКС

2 http://matmetod-popova.narod.ru/theme21.htm

3 http://ru.vlab.wikia.com

4 http://math.immf.ru/lections/302.html