

Практическая работа №14

Вычисление определенных интегралов

Цель: закрепить навыки вычисления определенных интегралов.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Определенный интеграл – это предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $i \in \overline{0, n-1}$, x_i - точки из отрезка $[a, b]$

$a = x_0$, $b = x_n$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $i \in \overline{0, n-1}$

2 Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$,

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$.

3 Свойства определенных интегралов

$$- \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$- \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$- \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$$

$$- \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$- \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4 Замена переменных в определенном интеграле:

$$\int_a^\beta f(u(x))u' dx = \int_a^b f(u)du;$$

где $du = u'(x)dx$, $a = u(\alpha)$, $b = u(\beta)$.

5 Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^{\beta} u dv = uv \Big|_a^{\beta} - \int_a^{\beta} v du.$$

Задание

- 1 Найти определенный интеграл, используя свойства интегралов
- 2 Найти интегралы методом замены переменной
- 3 Найти интегралы методом интегрирования по частям

Пример выполнения:

Исходные данные:

Вычислить интегралы.

Задание 1 $\int_1^3 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4 \right) dx$

Задание 2 $\int_0^1 \sqrt{x+32} dx; \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{15} x \cos x dx$

Задание 3 $\int_0^e x \ln x dx$

Решение.

Задание 1

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4 \right) dx &= 3 \int_1^4 \sqrt{x} dx + \int_1^4 x^{-3} dx - 4 \int_1^4 dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = \\ &= 2\sqrt{x^3} \Big|_1^4 - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = 2(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) - \left(\frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) - 4(4 - 1) = \\ &= 2(8 - 1) - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2} \right) - 4 \cdot 3 = 14 + \frac{15}{32} - 12 = 2\frac{15}{32}. \end{aligned}$$

Задание № 2.

$$\int_0^1 \sqrt{x+32} dx = \left| \begin{array}{l} u = x+32 \quad du = dx \\ 0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 33 \end{array} \right| = \int_0^{33} \sqrt{u} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{33} = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{33} = \frac{2}{3} \left(33^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{15} x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \quad du = \cos x dx \\ 0 \mapsto 0 \quad \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^{15} du = \frac{u^{16}}{16} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{1}{16} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{16} - 0 \right) = \frac{3^8}{2^{20}}. \end{aligned}$$

Задание № 3

$$\begin{aligned} \int_0^e x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^e x dx = \frac{e}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{x^2}{4} \Big|_0^e = \frac{e}{2} + \frac{e^2 - 0^2}{2} = \frac{e^2 + e}{2}. \end{aligned}$$

Задания к практической работе.

Задание 1

$$1 \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

$$2 \int_2^{3.5} \left(\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} \right)$$

$$3 \int_0^2 x(3-x)dx;$$

$$4 \int_0^9 (3\sqrt{x} - x) dx;$$

$$5 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 6}$$

$$6 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$$

$$7 \int_1^4 \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$8 \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 32} dx$$

$$9 \int_1^5 ((x-3)^2 - 4) dx;$$

$$10 \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$11 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx;$$

$$12 \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1} dx$$

$$13 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$14 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$15 \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + x - 6}$$

$$16 \int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx;$$

$$17 \int_0^2 x^2(3-x) dx;$$

$$18 \int_{-1}^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \right)$$

$$19 \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$$

$$20 \int_0^2 x(4x^2 + 3x - 2) dx;$$

$$21 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}$$

$$22 \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$23 \int_0^2 x(x^2 + 4x - 1) dx;$$

$$24 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$25 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$$

$$26 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$27 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$28 \int_1^5 ((x-2)^2 - 1) dx;$$

$$29 \int_1^4 ((x-2)^2 - 1) dx;$$

$$30 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Задание 2

$$1 \int_0^2 3^{2x+5} dx$$

$$2 \int_0^1 x(7x^2 - 5)^4 dx$$

$$3 \int_{-1}^0 4^{8x+7} dx$$

$$4 \int_1^4 \sqrt{x^2 - 1} \cdot x dx$$

$$5 \int_0^{\pi/4} \sin(4x) dx$$

$$6 \int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4+5x}} \right)$$

$$7 \int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{4-3x}} \right)$$

$$8 \int_0^1 \left(\frac{dx}{\sqrt{10-3x}} \right)$$

$$9 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$$

$$10 \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

$$11 \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$$

$$12 \int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx$$

13 $\int_2^6 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$

14 $\int_{-1}^1 \operatorname{tg} x dx$

15 $\int_2^3 \frac{2x+4}{x^2+4x-3} dx$

16 $\int_0^1 5^{2x-1} dx$

17 $\int_{-2}^0 5^{2x+9} dx$

18 $\int_{-2}^2 e^{2x+1} dx$

19 $\int_{-1}^1 9^{6x-1} dx$

20 $\int_0^1 2^{2x+1} dx$

21 $\int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx$

22 $\int_1^2 3^{7x+1} dx$

23 $\int_0^2 3^{3x-2} dx$

24 $\int_{-1}^1 5^{3x+1} dx$

25 $\int_{-2}^1 7^{2x+5} dx$

26 $\int_0^3 \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$

27 $\int_{-1}^2 2^{2x-1} dx$

28 $\int_{-1}^1 5^{9x+4} dx$

29 $\int_1^2 5^{3x-4} dx$

30 $\int_1^2 e^{3x+2} dx$

Задание 3

1 $\int_0^1 \arcsin x dx;$

2 $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)};$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx;$

5 $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx;$

6 $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx;$

7 $\int_0^1 x e^{-x} dx;$

8 $\int_0^1 x \arcsin x dx;$

9 $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx;$

10 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx;$

11 $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) dx;$

12 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx;$

13 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x};$

14 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\cos^2 x};$

15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx;$

16 $\int_0^1 5x e^{2x} dx;$

17 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^{2x} dx;$

18 $\int_0^1 x \operatorname{arctg} 2x dx;$

19 $\int_0^1 3x^2 e^{2x} dx;$

20 $\int_0^{\pi/8} \frac{xdx}{\cos^2 2x};$

21 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx;$

22 $\int_0^1 x \operatorname{arctg} 3x dx;$

23 $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$

24 $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx;$

25 $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} 3x dx;$

26 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) dx;$

27 $\int_{-1}^1 x \arcsin x dx;$

28 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^{3x} dx;$

29 $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx;$

30 $\int_0^1 \arcsin x dx$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 14

Тема занятия: *вычисление определенных интегралов*

Цель выполнения задания: *привить навыки нахождения определенных интегралов методом замены переменной и интегрированием по частям*

Необходимо знать: *основные формулы и правила вычисления определенных интегралов*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила вычисления определенных интегралов*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что называется определенным интегралом? 2 В чем принципиальное отличие определенного интеграла от неопределенного? 3 Формула Ньютона-Лейбница 4 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле 5 Свойства определенного интеграла*

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012
- 4 В.С. Шипачев Задачник по высшей математике –М 2001
- 5 <http://mym-math.narod.ru>

3 <http://www.pm298.ru>

7 <http://www.fxyz.ru>

8 <http://old.college.ru>