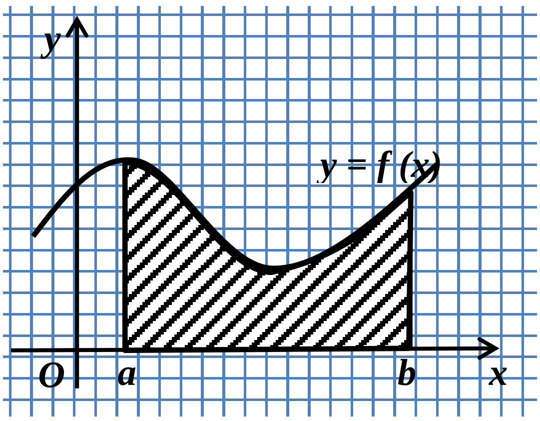
Практическая работа № 15
Применение определенных интегралов для вычисления площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения.

Цель работы: научиться вычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения.

Содержание работы.

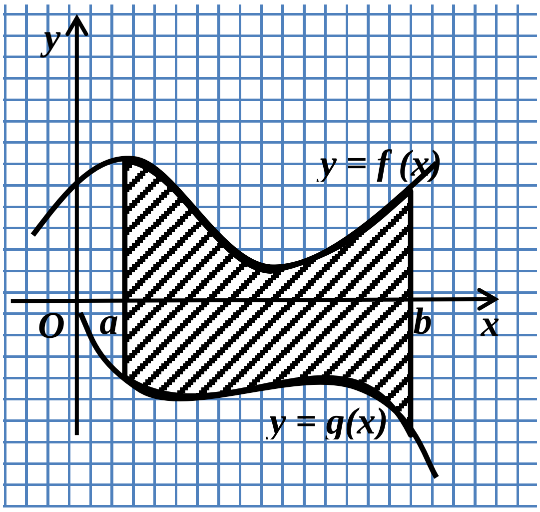
Основные понятия.



1 Фигура, ограниченная графиком непрерывной, знакопостоянной функции *f(x)*, осью абсцисс и прямыми *x=a, x=b,* называется криволинейной трапецией.

2 Если *f(x)* непрерывная и неотрицательная функция на отрезке *[a;b]*, то площадь соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразных. *S = F(b) – F(a)*, где *F(x)* – первообразная *f(x)*.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

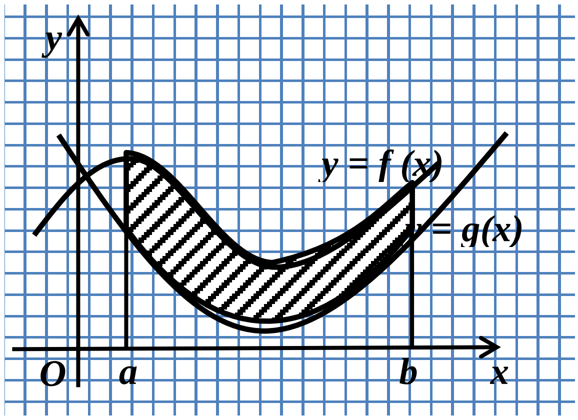


3 Если криволинейная трапеция расположена под осью Ox и ограничена осью Ox, кривой y=f(x) и двумя прямыми x=a и x=b, то площадь находится по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|F(b) - F(a)\right|.$$

4 Фигура расположена над и под осью Ox и ограничена кривыми *y=f(x), y=g(x)* и двумя прямыми *x=a* и *x=b*, тогда

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_a^b g(x)dx\right|.$$



5 Площадь ограничена двумя пересекающимися кривыми *y=f(x)* и *y=g(x)* *(f(x)>g(x))*, тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

где a и b –точки пересечения графиков функций *f(x)* и*g(x)*

6 Тело, полученное в результате вращения плоской фигуры, относительно какой-то оси, называют фигурой вращения.

7 Если на плоскости Oxy кривую, заданную уравнением *y=f(x),* где $a \le x \le b$, где f(x) непрерывна и неотрицательна вращать вокруг оси x, то

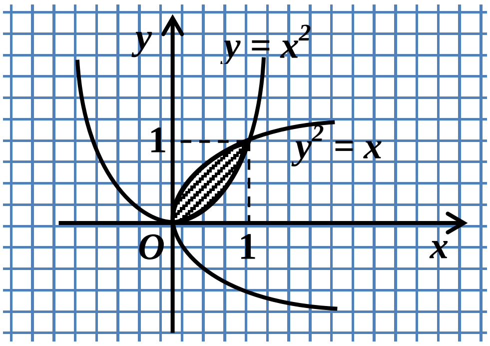
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Задание

Исходные данные:

1Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2; y^2 = x$.

Решение:



а) Найдем точки пересечения графиков заданных функций:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} x = x^4 \\ x^4 - x = 0 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} x(x^3 - 1) = 0 \\ x_1 = 0;\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

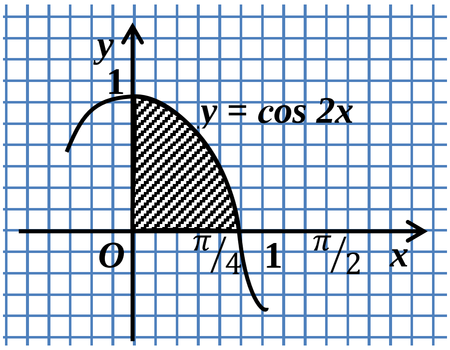
б) Вычислим S фигуры, как разность интегралов функций $y = x^2; y^2 = x : y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

Наша площадь находится выше оси Oy, значит $y = \sqrt{x}$

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2x\sqrt{x} - x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $S = \dfrac{1}{3}$

2 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos 2x; y = 0; 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ вокруг оси Ox.



Решение:

а) Построим линию $y = \cos 2x; 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

б) Вычислим V фигуры по формуле:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Ответ: $V = \dfrac{\pi^2}{8}$

Задания к практической работе.

1 $S-?\quad xy=6$

$x+y-7=0$

$V-?\ y=e^x;$

$x=0;\ x=1;\ y=0$

2 $S-?\quad y=8+2x-x^2$

$y=x+6$

$V-?\ y=-\dfrac{2}{x};$

$x=1;\ x=4;\ y=0$

3 $S-?\quad y=-x^2+5$

$y=x+3$

$V-?\ y=3x-x^2;$

$y=0$

4 $S-?\quad y^2=4x$

$x^2=4y$

$V-?\ y=-x^3;$

$x=0;\ x=2;\ y=0$

5 $S-?\quad x-2y+4=0$

$3x+2y-12=0\ и\ y=0$

$V-?\ y=\sin x;$

$x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2};\ y=0$

6 $S-?\quad y=2x^2-1$

$y=x^2$

$V-?\ y=\dfrac{5}{x};$

$x=1;\ x=5;\ y=0$

7 $S-?\quad x+y-5=0$

$x-2y+4=0\ и\ y=0$

$V-?\ y=-\dfrac{4}{x};$

$x=-4;\ x=-1;\ y=0$

8 $S-?\quad y=-x^2-1$

$x=1;\ x=4;\ y=0$

$V-?\ y=-\dfrac{4}{x};$

$x=1;\ x=4;\ y=0$

9 $S-?\quad y=\dfrac{1}{x};\ y=x^2$

$1\le x\le e$

$V-?\ y=\sin 2x;$

$x=0;\ x=\dfrac{\pi}{4};\ y=0$

10 $S-?\quad y=x^2-6x$

$y=0$

$V-?\ y=\sin x;$

$x=\dfrac{\pi}{2};\ x=\pi;\ y=0$

11 $S-?\quad y=x^2+6x+5$

$y=0$

$V-?\ y=-x^3;$

$x=0;\ x=4;\ y=0$

12 $S-?\quad xy=6$

$x+y-7=0$

$V-?\ y=x-x^2;$

$y=0$

13 $S-?\quad y=-x^2-4$

$y=0$

$V-?\ y=\dfrac{1}{x};$

$x=1;\ x=2;\ y=0$

14 $S-?\quad y=4x-x^2$

$x=5;\ y=0$

$V-?\ y=e^x;$

$x=0;\ x=2;\ y=0$

15 $S-?\quad y^2=9x$

$x^2=9y$

$V-?\ y=4-x^2;$

$y=0$

16 $S-?\quad y=e^{-x};\ y=e^x;$

$x=0;\ x=1$

$V-?\ y=2\sin x;$

$x=\dfrac{\pi}{2};\ x=\pi;\ y=0$

17 $S-?\quad y=x^2-4$

$y=x^2$

$V-?\ y=e^x;$

$x=-2;\ x=0;\ y=0$

18 $S-?\quad y=2\sin x;\ y=0$

$x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2}$

$V-?\ y=1-x^2;$

$y=0$

19
$S-?\quad y=3\cos x;\ y=0$
$x=-\dfrac{\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}$
$V-?\ y=e^x;$
$x=-1;\ x=0;\ y=0$

20
$S-?\quad y=\dfrac{1}{2}x^3;\ y=0$
$x=0;\ x=4$
$V-?\ y=x^2-4;$
$y=0$

21
$S-?\quad y=\sin x;\ y=0$
$x=-\pi;\ x=\pi$
$V-?\ y=2x+x^2;$
$y=0$

22
$S-?\quad y=-\dfrac{1}{x};\ x=1$
$x=3;\ y=0$
$V-?\ y=x^2+1;$
$x=1;\ x=2;\ y=0$

23
$S-?\quad y=3\cos x;\ y=0$
$x=-\dfrac{\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}$
$V-?\ y=x^3;$
$x=0;\ x=2;\ y=0$

24
$S-?\quad y=\cos 2x;\ y=0$
$x=-\dfrac{\pi}{4};\ x=\dfrac{\pi}{4}$
$V-?\ y=4x-x^2;$
$y=0$

25
$S-?\quad y=1+\sin x;\ y=0$
$x=0;\ x=2\pi$
$V-?\ y=x^2-1;$
$y=0$

26
$S-?\quad y=x^2-6x$
$y=0$
$V-?\ y=\dfrac{4}{x};$
$x=1;\ x=4;\ y=0$

27
$S-?\quad y=3\cos x;\ y=0$
$x=-\dfrac{\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}$
$V-?\ y=2x-x^2;$
$y=0$

28
$S-?\quad y=x^2+6x+5$
$y=0$
$V-?\ y=\sin x;$
$x=0;\ x=\pi;\ y=0$

29
$S-?\quad y=\dfrac{1}{x};\ x=1$
$x=3;\ y=0$
$V-?\ y=e^x;$
$x=-2;\ x=0;\ y=0$

30
$S-?\quad y=2\cos x;\ y=0$
$x=-\dfrac{\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}$
$V-?\ y=x^3;$
$x=0;\ x=2;\ y=0$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 15

Тема занятия: *Применение определенных интегралов для вычисленияплощадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения*

Цель выполнения задания: *научитьсявычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения*

Необходимо знать: *основные формулы и правила интегрирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила интегрирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое криволинейная трапеция? 2 Что такое фигура вращения? 3 Как вычислить площадь криволинейной трапеции? 4 Формула площади фигуры, расположенной ниже оси Ох. 5 Формула площади фигуры, расположенной как выше, так и ниже оси Ох. 6 Формула площади фигуры, расположенной между графиками двух функций. 7 Формула объематела вращения.*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
4 http://works.tarefer.ru
5 http://festival.1september.ru