Практическая работа № 18

Разложение функции в степенной ряд

Цель работы: научиться раскладывать функцию в ряд Тейлора, Маклорена и Фурье

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные, то ее можно разложить в степенной ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+\cdots$$

2 Если a = 0, то такое разложение называется рядом Маклорена:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots$$

3 Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \le x \le \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов.

4 Стандартная запись разложения функции в ряд Фурье через сумму sinx и cosx: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_o, $a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ - действительные константы.

5 Для диапазона от $-\pi$ до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=1,2,3,\ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

Коэффициенты a_o, a_n *и* b_n называются коэффициентами Фурье, и если их можно найти, то ряд (1) называется рядом Фурье**,** соответствующим функции f(x).

Задание

1 Найти область сходимости степенного ряда

2 Разложить функцию в ряд Маклорена

3 На отрезке [– π; π] разложить функцию в ряд Фурье

Пример выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n^3+7}$

Решение:

Найдем радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n^3+7}$.

Здесь $a_n=\frac{n}{n^3+7}$; $a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^3+7}$; $x_0=2$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^3+7)}{n((n+1)^3+7)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n^3}\right)}{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{7}{n^3}\right)}=1$$

Область сходимости для данного степенного ряда $(2-1;2+1)=(1;3)$

Задание 2

Исходные данные:

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=cos2x$

Решение:

Найдем производные функции:

$f'(x)=-2\sin 2x=-2^1\sin 2x$; $f'(0)=0$

$f''(x)=-4\cos 2x=-2^2\cos 2x$; $f''(0)=-4=-2^2$

$f'''(x)=8\sin 2x=2^3\sin 2x$; $f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=16\cos 2x=2^4\cos 2x$; $f^{IV}(0)=16=2^4$

$f^{V}(x)=-32\sin 2x=-2^5\sin 2x$; $f^{V}(0)=0$

Тогда $f(x)=cos2x=1-2^2x^2+2^4x^4-\ldots=2^0x^0-2^2x^2+2^4x^4-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^{2n}$

Ответ: $cos2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^{2n}$

Задание 3

Исходные данные:

1 На отрезке [– π; π] разложить в ряд Фурье функцию *f (x) = 2 x + 3*.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)dx=\frac{1}{2\pi}\left(x^2+3x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi^2+3\pi-\pi^2+3\pi\right)=3$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=2x+3; & du=2dx\\ dv=\cos nx\,dx; & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2x+3}{n}\sin nx\ \Big|_{-\pi}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\ \Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-\cos\pi n)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=2x+3; & du=2dx\\ dv=\sin nx\,dx; & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x+3}{n}\cos nx\ \Big|_{-\pi}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=-\frac{2\pi+3}{\pi n}\cos\pi n+\frac{-2\pi+3}{\pi n}\cos\pi n=\frac{\cos\pi n}{\pi n}(-2\pi-3-2\pi+3)=$$

$$=-\frac{4\cos\pi n}{n}=-\frac{4}{n}(-1)^n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n}$$

В результате получим $f(x)=3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$

2 На отрезке [– π; π] разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{6\pi}(\pi^3+\pi^3)=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2; & du=2xdx\\ dv=\cos nx\,dx; & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx\right)=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx\\ dv=\sin nx\,dx; & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2}\cos n\pi+\frac{2}{n^2}\cos n\pi-\frac{2}{\pi n^3}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2; & du=2xdx\\ dv=\sin nx\,dx; & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx\right)=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx\\ dv=\cos nx\,dx; & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^3}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

В результате получим $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

Задания к практической работе.

Задание 1

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[4]{n^2-4}}$	**11**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}(x+3)^n$	**21**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}(x-1)^n$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{n^2(n-3)^2}}$	**12**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{3^n}(x-1)^n$	**22**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+1}{3^n}x^n$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n+1}{2^n}x^n$	**13**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}(x+2)^n$	**23**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n+1}{3^n}(x-1)^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}(x-4)^n$	**14**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n+1}{3^n}(x-3)^n$	**24**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n+1}{2^n}(x+1)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-4}(x-7)^n$	**15**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2^n}(x+3)^n$	**25**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}(x-3)^n$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}(x-3)^n$	**16**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{5^n}x^n$	**26**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}(x-5)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-4}x^n$	**17**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}x^n$	**27**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^n}x^n$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(x-1)^n$	**18**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}(x+1)^n$	**28**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2+1}x^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}(x+2)^n$	**19**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^n}(x-2)^n$	**29**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+2}x^n$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}(x-1)^n$	**20**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}(x+2)^n$	**30**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n+1}{5^n}(x-1)^n$

Задание 2

1	$f(x)=\sin 3x$	**11**	$f(x)=\sin 8x$	**21**	$f(x)=7^x$
2	$f(x)=\ln(1+3x)$	**12**	$f(x)=e^{6x}$	**22**	$f(x)=\sin 4x$
3	$f(x)=cos7x$	**13**	$f(x)=cos4x$	**23**	$f(x)=e^{-3x}$
4	$f(x)=e^{3x}$	**14**	$f(x)=\ln(5x+1)$	**24**	$f(x)=\sin\frac{x}{3}$
5	$f(x)=cos\frac{x}{2}$	**15**	$f(x)=e^{4x}$	**25**	$f(x)=6^x$
6	$f(x)=e^{5x}$	**16**	$f(x)=5^x$	**26**	$f(x)=\lg(x-1)$
7	$f(x)=cos6x$	**17**	$f(x)=\sin 5x$	**27**	$f(x)=e^{4x}$
8	$f(x)=3^x$	**18**	$f(x)=\lg(x+1)$	**28**	$f(x)=4^x$

9	$f(x)=cos\frac{x}{3}$	**19**	$f(x)=8^x$	**29**	$f(x)=\ln(3x+2)$
10	$f(x)=e^{-2x}$	**20**	$f(x)=\ln(2x+1)$	**30**	$f(x)=\lg(x+5)$

Задание 3

1	$f(x) = 3x + 2$	**11**	$f(x) = 5x$	**21**	$f(x) = 2x - 3$
2	$f(x) = x^3$	**12**	$f(x) = 2x - \pi$	**22**	$f(x) = 3 - 2x$
3	$f(x) = 3x^2$	**13**	$f(x) = x - 2$	**23**	$f(x) = 3x - 4$
4	$f(x) = 4x^3$	**14**	$f(x) = 2x^3$	**24**	$f(x) = x - 5$
5	$f(x) = x - 1$	**15**	$f(x) = 6x^3$	**25**	$f(x) = 2x - 3\pi$
6	$f(x) = x - \pi$	**16**	$f(x) = 3x - 2$	**26**	$f(x) = 3x^3$
7	$f(x) = x + 5\pi$	**17**	$f(x) = 3x - 2\pi$	**27**	$f(x) = 2x - 3$
8	$f(x) = 2x - 9$	**18**	$f(x) = 6x^2$	**28**	$f(x) = 4x + \pi$
9	$f(x) = 3 - 4x$	**19**	$f(x) = x + 3\pi$	**29**	$f(x) = 3x - 1$
10	$f(x) = 3x - 4$	**20**	$f(x) = 2x^2$	**30**	$f(x) = x + \pi$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 18

Тема занятия: *разложение функции в степенной ряд*

Цель выполнения задания: *научиться раскладывать функцию в ряд Тейлора, Маклорена и Фурье*

Необходимо знать: *основные формулы и правила разложения функций в ряд Тейлора, Маклорена и Фурье*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила разложения функций в ряд Тейлора, Маклорена и Фурье*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Формула разложения функции в ряд Тейлора 2 Формула разложения функции в ряд Маклорена 3 На основании какого предположения основывается разложение функции в ряд Фурье? 4 Формула разложения функции в ряд Фурье через сумму sinx и cosx. 5 Как рассчитываются коэффициенты ряда Фурье?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012

4 http://ru.wikipedia.org

5 http://www.dpva.info/Guide/GuideMathematics/SeriesOfTaylorMaklorenFourier

6 http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/razd13z1/par13_5z1.htm