Практическая работа № 19

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

2 Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

3 Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

4 Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных

5 Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x, искомой функцией y и её производной

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

6 Если уравнение может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

7 Дифференциальные уравнения $f(y)\,dy = g(x)\,dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

8 Линейное уравнение первого порядка – это уравнение вида: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

9 Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Задания

1 Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

2 Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' = k\cos^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x}; \quad y(0) = 1$, где k – номер варианта

3 Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{y}{x} = (3k+1)x + x^7$, где k – номер варианта

Исходные данные:
Решить дифференциальное уравнение $y'\cos^2 x + y = tgx$.

Решение:
а) Решим уравнение методом вариации постоянных (методом Лагранжа):
– найдем общее решение однородного уравнения
$$y'\cos^2 x + y = 0$$
$$y'\cos^2 x = -y;\quad \frac{dy}{dx}\cos^2 x = -y;\quad dy\cos^2 x = -y\,dx;\quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{\cos^2 x};\quad \ln|y| = -tgx + C;\quad y = e^{-tgx+C};\quad y = e^{-tgx}e^{C};\quad y = Ce^{-tgx}$$
– теперь полагаем $y = C(x)e^{-tgx};\quad y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)\frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}$, подставляем y и y' в исходное уравнение: $C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x - C(x)\frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$
$$C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx;\quad C(x) = \int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx$$
$$\int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{vmatrix} = \int te^t dt = \begin{vmatrix} u = t;\ du = dt \\ dv = e^t dt;\ v = e^t\end{vmatrix} =$$
$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$
– находим общее решение дифференциального уравнения
$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx-1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$
б) Решим это уравнение методом подстановки (методом Бернулли):
– для этого представим $y = u(x)\cdot v(x);\quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
– подставим y и y' в исходное уравнение:
$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)v'(x)\cos^2 x + u(x)\cdot v(x) = tgx$$
$$u'(x)v(x)\cos^2 x + u(x)\cdot\left(v'(x)\cos^2 x + v(x)\right) = tgx$$
– найдем частное решение уравнения:
$$v'(x)\cos^2 x + v(x) = 0;\quad v'(x) = -\frac{v(x)}{\cos^2 x};\quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$\ln|v| = -tgx;\quad v = e^{-tgx}$$
– найдем общее решение уравнения:
$$u'(x)v(x)\cos^2 x = tgx;\quad u'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = tgx$$
$$u(x) = \int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{vmatrix} = \int te^t dt = \begin{vmatrix} u = t;\ du = dt \\ dv = e^t dt;\ v = e^t\end{vmatrix} =$$
$$te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$
– находим общее решение дифференциального уравнения
$$y = e^{-tgx}\left(e^{tgx}(tgx-1) + C\right) = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

Ответ: $y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $y' = x + y$	2 $xy' - y = x^2 \cos x$	3 $y' = x + \dfrac{y}{x} - y$
4 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$	5 $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$	6 $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$
7 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$	8 $xy' + 2y = x^3$	9 $y' \cos x + y = 1 - \sin x$
10 $xy' + y - 2x = 0$	11 $y' + x^2 y = x^2$	12 $xy' + y = 3$
13 $y' \sin x - y \cos x = 1$	14 $(1 + x^2) y' - xy = 2x$	15 $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$
16 $y' + y \cos x = \sin 2x$	17 $xy' + y = \ln x + 1$	18 $xy' - 2y = 3x^5$
19 $y' + x^2 y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$	20 $y' + 3y\, tg 3x = \sin 6x$	21 $y' - y\, tgx = \dfrac{1}{\cos^3 x}$
22 $y' + 5x^4 y = -10x^9$	23 $y' - \dfrac{y}{x} = x$	24 $xy' + y - 4x = 0$
25 $y' + 2y\, tgx = \cos^4 x$	26 $y' - y = e^x$	27 $xy' + y - 2x = 0$
28 $xy' - 2y = 3x^5$	29 $y' + 5x^4 y = -10x^9$	30 $y' + x^2 y = x^2$
31 $y' + y \cos x = \sin 2x$	32 $xy' + y = \ln x + 1$	33 $xy' - 2y = 3x^5$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 19

Тема занятия: *Решение дифференциальных уравнений первого порядка*

Цель выполнения задания: *закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка*

Необходимо знать: *основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений первого порядка*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений первого порядка*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;* - *изучить схему решения задач;* - *выполнить задания практической работы;* - *сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое дифференциальное уравнение? 2 Что такое порядок дифференциального уравнения? 3 Что такое общее решение дифференциального уравнения? 4 Что такое частное решение дифференциального уравнения? 5 Что такое линейное дифференциальное уравнение? 6 Что такое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными? 7 Что такое линейное однородное дифференциальное уравнение? 8 Что такое неоднородное линейное дифференциальное уравнение?*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
3 Н.В. Боголомов Сборник задач по математике, -М, 2006
4 http://ru.wikipedia.org

5 http://www.mathprofi.ru
6 http://fmf.bigpi.biysk.ru
7 http://www.cleverstudents.ru
8 http://slovari.yandex.ru