

Практическая работа № 20
Линейные однородные дифференциальные уравнения
второго порядка.

Цель работы: закрепить навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Уравнение вида $y'' + \rho y' + qy = f(x)$, где ρ и q – вещественные числа, $f(x)$ – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

2 Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида: $y'' + \rho y' + qy = 0$, у которого правая часть $f(x)$ равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

3 Уравнение $K^2 + \rho K + q = 0$ называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения.

4 Характеристическое уравнение является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через K_1 и K_2 . Общее решение дифференциального уравнения может быть записано в зависимости от величины дискриминанта $D = \rho^2 - 4q$ характеристического уравнения следующим образом:

– При $D > 0$ корни характеристического уравнения вещественные и различные ($K_1 \neq K_2$), и общее решение имеет вид .

– При $D = 0$ корни характеристического уравнения вещественные и равные ($K_1 = K_2 = K$), и общее решение имеет вид:

– Если $D < 0$, то корни характеристического уравнения комплексные: , где – мнимая единица, и общее решение ($K_1 = \alpha + \beta i$, $K_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$), имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Задания

1 Найти общее решение уравнений

2 Найти частное решение уравнения

Исходные данные:

1 Найти частное решение дифференциального уравнения $2y'' - 5y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$$2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad k_1 = 2; \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y' :

$$y' = 2C_1 e^{2x} + \frac{C_2}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad C_1 = 1 - C_2$$

$$y'(0) = 2C_1 + \frac{C_2}{2} = 0; \quad 2 - 2C_2 + \frac{C_2}{2} = 0$$

$$4 - 4C_2 + C_2 = 0; \quad 3C_2 = 4; \quad C_2 = \frac{4}{3}; \quad C_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } y = -\frac{1}{3} e^{2x} + \frac{4}{3} e^{\frac{x}{2}}$$

2 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$, при $y(0) = 1; y'(0) = 0$.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$

$$D = 64 - 64 = 0$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4$$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y' :

$$y' = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

$$y(0) = C_1 = 1;$$

$$y'(0) = 4C_1 + C_2 = 0; \quad 4 + C_2 = 0; \quad C_2 = -4$$

$$\text{Ответ: } y = e^{4x}(1 - 4x)$$

3 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 8y' + 25y = 0$, при $y(0) = 1; y'(0) = 0$.

Решение:

а) Решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 8k + 25 = 0$$

$$D = 64 - 100 = -36$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

б) Найдем общее решение уравнения

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

в) Найдем частное решение уравнения.

Для этого вычислим y' и подставим начальные значения в y и y' :

$$y' = -4e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3e^{-4x}(-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) =$$

$$= e^{-4x}(C_1(-4 \cos 3x - 3 \sin 3x) + C_2(-4 \sin 3x + 3 \cos 3x))$$

$$y(0) = C_1 = 1; \quad y'(0) = -4C_1 + 3C_2 = 0; \quad -4 + 3C_2 = 0; \quad 3C_2 = 4; \quad C_2 = \frac{4}{3}$$

Ответ: $y = e^{-4x}(\cos 3x + \frac{4}{3} \sin 3x)$

Задания к практической работе.

Задание 1

№ п/п	Задание №1	Задание №2	Задание №3
1	$y'' - 3y' - 4y = 0$	$y'' - 2y' + y = 0$	$y'' + 9y = 0$
2	$y'' + 5y' + 6y = 0$	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y'' + \frac{1}{4}y = 0$
3	$y'' - 9y = 0$	$y'' - 6y' + 9y = 0$	$y'' + 25y = 0$
4	$y'' - y' - 6y = 0$	$y'' - 12y' + 36y = 0$	$y'' + 36y = 0$
5	$y'' + 4y' = 0$	$y'' - 14y' + 49y = 0$	$y'' + \frac{16}{81}y = 0$
6	$y'' + y' - 2y = 0$	$y'' - 3y' - 4y = 0$	$y'' + 64y = 0$
7	$y'' - 4y' + 3y = 0$	$y'' - 10y' + 25y = 0$	$y'' + 81y = 0$
8	$y'' + 3y' - 4y = 0$	$y'' - 10y' + 225y = 0$	$y'' + \frac{9}{49}y = 0$
9	$y'' - 16y = 0$	$y'' - 2y' + y = 0$	$y'' + 121y = 0$
10	$y'' - 4y' = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$	$y'' + \frac{1}{4}y = 0$
11	$y'' - y' = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$y'' + \frac{64}{25}y = 0$
12	$y'' - 9y' + 20y = 0$	$y'' - 16y' + 64y = 0$	$y'' + \frac{64}{49}y = 0$
13	$y'' - y' - 2y = 0$	$y'' - 22y' + 121y = 0$	$y'' + 49y = 0$
14	$y'' + 3y' - 20y = 0$	$y'' + 12y' + 36y = 0$	$y'' + \frac{1}{9}y = 0$
15	$y'' - 5y' + 6y = 0$	$y'' + 20y' + 100y = 0$	$y'' + 16y = 0$
16	$y'' - 5y' - 24y = 0$	$y'' + 16y' + 64y = 0$	$y'' + \frac{49}{25}y = 0$
17	$y'' + 4y' + 3y = 0$	$y'' + 6y' + 9y = 0$	$y'' + 100y = 0$
18	$y'' - y' - 20y = 0$	$y'' - 18y' + 81y = 0$	$y'' + \frac{9}{25}y = 0$
19	$y'' + y' - 6y = 0$	$y'' - 20y' + 100y = 0$	$y'' + \frac{81}{4}y = 0$
20	$y'' - 9y' + 20y = 0$	$y'' + 18y' + 81y = 0$	$y'' + 81y = 0$
21	$y'' + y' = 0$	$y'' - 16y' + 64y = 0$	$y'' + 121y = 0$

22	$y'' + 5y' - 24y = 0$	$y'' + 22y' + 121y = 0$	$y'' + \frac{25}{4}y = 0$
23	$y'' - 11y' + 18y = 0$	$y'' + 12y' + 36y = 0$	$y'' + 16y = 0$

24	$y'' - 5y' = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$	$y'' + \frac{4}{49}y = 0$
25	$y'' - 13y' + 12y = 0$	$y'' - 18y' + 81y = 0$	$y'' + 36y = 0$
26	$y'' + 10y' = 0$	$y'' + 8y' + 16y = 0$	$y'' + 100y = 0$
27	$y'' - 5y' - 6y = 0$	$y'' - 20y' + 100y = 0$	$y'' + \frac{9}{4}y = 0$
28	$y'' + 12y' = 20y = 0$	$y'' + 10y' + 25y = 0$	$y'' + 49y = 0$
29	$y'' - 15y' = 0$	$y'' + 16y' + 64y = 0$	$y'' + \frac{81}{100}y = 0$
30	$y'' - 4y' - 21y = 0$	$y'' + 18y' + 81y = 0$	$y'' + 64y = 0$

Задание 2

Найти решение задачи Коши $y'' + 2y' + 10y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3k$, где k – номер по списку.

Задание 3

1 $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$	11 $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$	21 $y'' - y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
2 $y'' + 25y' = 0$, при $y(1) = 20$; $y'(1) = 10$	12 $y'' - 12y' + 35y = 0$, при $y(1) = 10$; $y'(1) = 2$	22 $y'' - 4y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 8$
3 $y'' - y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$	13 $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$	23 $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
4 $y'' - 4y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 8$	14 $y'' + 25y' = 0$, при $y(1) = 20$; $y'(1) = 10$	24 $y'' - 12y' + 35y = 0$, при $y(1) = 10$; $y'(1) = 2$
5 $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$	15 $y'' - y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$	25 $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$
6 $y'' - 12y' + 35y = 0$, при $y(1) = 10$; $y'(1) = 2$	16 $y'' - 4y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 8$	26 $y'' + 25y' = 0$, при $y(1) = 20$; $y'(1) = 10$
7 $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$	17 $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$	27 $y'' - y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
8 $y'' + 25y' = 0$, при $y(1) = 20$; $y'(1) = 10$	18 $y'' - 12y' + 35y = 0$, при $y(1) = 10$; $y'(1) = 2$	28 $y'' - 4y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 8$
9 $y'' - y' = 0$, при $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$	19 $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$	29 $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
10 $y'' - 4y' = 0$,	20 $y'' + 25y' = 0$,	30 $y'' - 12y' + 35y = 0$,

при $y(0) = 0; y'(0) = 8$

при $y(1) = 20; y'(1) = 10$

при $y(1) = 10; y'(1) = 2$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 20

Тема занятия: *Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка*

Цель выполнения задания: *закрепить навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка*

Необходимо знать: *основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения однородных линейных уравнений второго порядка*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, методы решения линейных уравнений второго порядка*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое линейное дифференциальное уравнение второго порядка? 2 Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением? 3 Что такое характеристическое уравнение? 4 Как связано общее решение однородного дифференциального уравнения с корнями характеристического уравнения?*

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
- 4 <http://math.immf.ru/lectures/009.html>
- 5 <http://www.cleverstudents.ru/>
- 6 <http://rudocs.exdat.com/>