Практическая работа 2

Решение систем линейных уравнений третьего порядка.

Цель работы: закрепить умения решать системы линейных уравнений третьего порядка методами Крамера, Гаусса и матричным методом.

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где, a_{ij} (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) и b_i (i=1,2,...,m), постоянные величины.

2 Решением системы уравнений называется такой n-мерный вектор X = (x_1, x_2,...,x_n), который одновременно является решением каждого из уравнений системы.

3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера: пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы системы и через Δ_j определитель, который получается из определителя Δ заметой j-го столбца столбцом правых частей системы (j=1,2,...n).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если определитель матрицы отличен от нуля, т.е. Δ≠0, то система имеет единственное решение, которое находится по формуле: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}\ (j = 1,2,\ldots,n)$

4 Суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью некоторых операций исходную систему уравнений можно свести к более простой системе. Эта простая система имеет треугольный вид:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ a_{2N}x_N &= b_2 \\
a_{33}x_3 + \ldots\ a_{3N}x_N &= b_3 \\
\ldots & \\
\ldots\ a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}
$$

Особенность этой системы - в строках с номером i все коэффициенты aij при j<i равны нулю. Если мы смогли привести нашу систему уравнений к такому треугольному виду, то решить уравнения уже просто. Из последнего уравнения находим $x_N = b_N / a_{NN}$. Дальше подставляем его в предпоследнее уравнение и находим из него x_{N-1}. Подставляем оба найденных решения в следующее с конца уравнение и находим x_{N-2}. И так далее, пока не найдем x_1, на чем решение заканчивается. Такая процедура называется обратной прогонкой.

5 Если к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ добавить в качестве *(n+1)-ого* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы линейных уравнений, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$
A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)
$$

6 Для приведения системы уравнений к треугольному виду воспользуемся свойствами: если с системой линейных алгебраических уравнений произвести следующие действия:

- поменять местами два уравнения,
- умножить обе части какого-либо уравнения на произвольное и отличное от нуля действительное (или комплексное) число *k*,
- к обеим частям какого-либо уравнения прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на произвольное число *k*,то получится эквивалентная система, которая имеет такие же решения (или также как и исходная не имеет решений).

7 Две системы называются эквивалентными (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение

8 Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием

9 Теорема Кронекера-Капелли: Если ранг матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, то система совместна, причем имеет единственное решение, если эти ранги совпадают с числом неизвестных, и бесконечное

множество решений, если ранги меньше числа неизвестных. Если ранг матрицы не совпадает с рангом расширенной матрицы, то система несовместна

10 В матричном методе решения систем линейных алгебраических уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, которые в матричной форме записываются как $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов.

11 Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, т.е. решение СЛАУ находится с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Задание

1 Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Крамера

2 Решить систему линейных уравнений третьего порядка методом Гаусса

3 Решить систему линейных уравнений третьего порядка матричным методом

Исходные данные:

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - 6z = 23 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Задание 1

Решение:

а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5+6) + 4 \cdot (3+18) - 2(3+15) = 1 + 84 - 36 = 49$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

б) Вычислим Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 23 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 23 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5+6) + 4 \cdot (23) - 2(23) = 3 + 92 - 46 = 49$$

в) Вычислим Δ_y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 23 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 23 - 3 \cdot (3+18) - 2(-69) = 23 - 66 + 138 = 98$$

г) Вычислим Δ_z:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 23 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 23 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 4 \cdot (-69) + 3(3+15) = -23 - 276 + 54 = -245$$

г) По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{49}{49} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{98}{49} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-245}{49} = -5$$

Ответ: (1; 2; – 5)

Задание 2

Решение:

Запишем систему в матричном виде и приведем ее к треугольной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 & 23 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 13 & 7 & -9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 49 & -245 \end{array}\right)$$

Тогда получим: $z = \dfrac{-245}{49} = -5; \quad y = \dfrac{14}{7} = 2; \quad x = 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 1$

Задание 3

Решение:

а) Определитель системы Δ = 49

б) Найдем обратную к матрице коэффициентов:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 18;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ -21 & 7 & 0 \\ 18 & -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{49} & \frac{2}{49} & \frac{14}{49} \\ \frac{-21}{49} & \frac{7}{49} & 0 \\ \frac{18}{49} & \frac{-13}{49} & \frac{7}{49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{49} & \frac{2}{49} & \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{49} & \frac{-13}{49} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

в) Найдем X:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{49} & \frac{2}{49} & \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{49} & \frac{-13}{49} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{49} \cdot 3 + \frac{2}{49} \cdot 23 \\ -\frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 23 \\ \frac{18}{49} \cdot 3 - \frac{13}{49} \cdot 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{49} + \frac{46}{49} \\ -\frac{9}{7} + \frac{23}{7} \\ \frac{54}{49} - \frac{299}{49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$

Задания к практической работе.

1 $\begin{cases} 3x+5y+z=-2 \\ -2x-2y-3z=7 \\ x+4y+z=-5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+3z=2 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y-3z=-3 \\ 2x-y-6z=9 \\ -x+y+4z=-6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x-6y-z=1 \\ -x+2y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x+5y+z=2 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+3y-3z=-4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 3x-2y-2z=-4 \\ -2x+2y-3z=1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ -2x-3y-5z=-1 \\ 4x-2y-z=6 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ 3x+2y-2z=-3 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$

9 $\begin{cases} -x+3y-4z=-3 \\ 2x-y-3z=5 \\ -3x+4y+5z=-2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 5x-3y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=-1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ x+2y-5z=3 \\ -4x+y+2z=-3 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x-2y+2z=5 \\ 5x+y-3z=-6 \\ -2x+2y-z=1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x-4y+5z=4 \\ x+2y+z=6 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-5y+2z=3 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+5y-2z=-1 \\ -4x-3y-5z=-5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 4x+5y+4z=3 \\ -7x+2y-z=2 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-3y-5z=4 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x-y+z=-4 \\ 5x+6y-2z=23 \\ 4x-3y-2z=4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} -2x+3y-2z=4 \\ x+y+z=-7 \\ 4x-3y-z=6 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 3x+2y+7z=4 \end{cases}$

21 $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

22 $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y+2z=7 \\ 2x-y-3z=8 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 5x+2y-z=-1 \\ 3x-y+3z=-4 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$

24 $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x+5y-3z=-1 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x+5y-3z=-4 \\ 3x+y-5z=10 \\ -2x-3y+z=-9 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 5x+3y+2z=-1 \\ x-y+4z=1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -4x+3y-z=3 \\ 3x-2y-2z=11 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 4x+5y+4z=-3 \\ 3x+3y-5z=8 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+4y+5z=2 \\ -4x-7y-3z=3 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -x+y-z=-6 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 5x+7y-4z=3 \\ 2x-2y-7z=-3 \end{cases}$

32 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 3x+7y+z=2 \\ -2x+2y-3z=-1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} -x-y-z=-2 \\ 7x-4y-z=-4 \\ -5x+3y+2z=9 \end{cases}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 2

Тема занятия: *решение систем линейных уравнений третьего порядка*

Цель выполнения задания: *закрепить умения решать системы линейных уравнений третьего порядка методами Крамера, Гаусса и матричным методом.*

Необходимо знать: *основные формулы и правила линейной алгебры*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила линейной алгебры*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;* - *изучить схему решения задач;* - *выполнить задания практической работы;* - *сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое матричная форма системы линейных уравнений? 2 Что такое определитель матрицы? 3 Что такое матрица? 4 Суть метода Крамера решения систем. 5Суть метода Гаусса решения систем. 6 Что такое расширенная матрица?7 Правилаприведения матрицы к треугольному виду. 8Свойства систем линейных уравнений. 9 Что такое равносильные системы? 10 Что такое равносильные преобразования? 11 Теорема Кронекера-Капелли 12 Как представить систему линейных уравнений в матричном виде? 13 Решение системы уравнений в матричном виде*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 *Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006*

4 *http://www.cleverstudents.ru*

5 *http://www.coolreferat.com*