Практическая работа 1

Логические операции. Равносильность формул

Цель работы: Научиться строить таблицы истинности логических высказываний и преобразовывать формулы, используя основные равносильности

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Логика – наука о законах и формах мышления

2 Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно

3 Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

4 Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

5 Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение

6 Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

7 Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

8 Алгебра логики – это наука об общих правилах и законах действий над логическими переменными и высказываниями.

9 Самой простой логической операцией является операция НЕ, по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT ( ). Если А – истинно, то $\bar{A}$ – ложно и наоборот. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента. Логическая операция НЕ является унарной, т.е. действие выполняются над одним операндом. Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

10 Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением, а ИЛИ – дизъюнкцией, или логическим сложением. Операция И

(обозначается «И», «and», «&», A•B) имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Таблица истинности F = A ∧ B:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

11 Операция ИЛИ (обозначается «ИЛИ», «or», A+B, A∨B) называется дизъюнкцией или логическим сложением и дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Таблица истинности F = A ∨ B:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

12 Логическое следование: импликация – связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) – следствием из этого условия. Результатом импликации является ЛОЖЬ только тогда, когда условие A истинно, а следствие B ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ … , ТО … Таблица истинности F = A → B:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13 Логическая равнозначность: эквивалентность – определяет результат сравнения двух простых логических выражений A и B. Результатом эквивалентности является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности". Таблица истинности F = A ↔ B:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

14 Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении: 1. инверсия → 2. Конъюнкция → 3. Дизъюнкция → 4. Импликация → 5. Эквивалентность

15 Для изменения указанного порядка выполнения операций используются круглые скобки.

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

16 Штрих Шеффера, $A|B$ или антиконъюнкция, по определению это отрицание конъюнкции $F = A|B = \overline{A \wedge B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

17 Стрелка Пирса, $A \downarrow B$ или антидизъюнкция, по определению $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

18 Сумма по модулю два, $A \oplus B$ или антиэквивалентность, по определению $F = A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

19 Основные законы логики : A = A – закон тождества

$A \,\&\, \overline{A} = 0$ – закон непротиворечия

$A \vee \overline{A} = 1$ – закон исключенного третьего

$\overline{\overline{A}} = A$ – закон двойного отрицания

– Свойства констант: $\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$

$A \vee 0 = A$ $A \,\&\, 0 = 0$

$A \vee 1 = 1$ $A \,\&\, 1 = 1$

– Законы идемпотентности: $A \vee A = A$; $A \,\&\, A = A$

– Законы коммутативности: $A \vee B = B \vee A$; $A \,\&\, B = B \,\&\, A$

– Законы ассоциативности: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$; $A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$

– Законы дистрибутивности: $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$;
$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$
– Законы поглощения: $A \vee (A \& B) = A$; $A \& (A \vee B) = A$
– Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$; $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Задание

1 Составить таблицу истинности сложного логического выражения

2 Для заданного логического выражения:

- построить таблицу истинности;
- упростить высказывание, используя равносильные преобразования;
- полученный результат проверить, построив для него таблицу истинности.

Пример выполнения:

1 Исходные данные:

$F = A \vee \overline{B} \wedge C$.

Решение:

1 Определим количество переменных – их 3, значит количество строк в таблице истинности = $2^3 + 1 = 9$ (каждый операнд принимает одно из двух значений – 0 или 1)

2 Определим количество и порядок действий: 3 действия ($\partial 1 = \overline{B}$, $\partial 2 = \partial 1 \wedge C$ и $\partial 3 = A \vee \partial 2$), значит количество столбцов = 3 (3 переменные) + 3 (3 действия) = 6

3 Составляем таблицу истинности, вписывая в соответствующие ячейки результаты действий, используя правила алгебры логики, например, если B = 1, то $\overline{B} = 0$; $\partial 1 = 1$, C = 1, то $\partial 1 \wedge C = 1$ и т. д.

A	B	C	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

2 Исходные данные:

$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$.

Решение:

1 $(X \overset{\partial 1}{\to} Y) \overset{\partial 4}{\wedge} (Y \overset{\partial 2}{\to} Z) \overset{\partial 5}{\to} (Z \overset{\partial 3}{\to} X)$.

2 Составим таблицу истинности для исходного выражения:

X	Y	Z	∂1	∂2	∂3	∂4	∂5
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3 Упростим высказывание:

– преобразуем импликацию:

$(X \to Y)(Y \to Z) \to (Z \to X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X)$;

– воспользуемся законом де Моргана для преобразования инверсии:

$\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{\overline{X}}\,\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\,\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X$;

– по закону двойного отрицания:

$\overline{\overline{X}}\,\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\,\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X$;

– перегруппируем высказывание и воспользуемся законом поглощения:

$X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee X \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} = X \vee \overline{Z}$

4 Составим таблицу истинности для полученного выражения:

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$X \vee \overline{Z}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Результирующие столбцы в двух таблицах совпали, следовательно, выполненные преобразования верны

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $F = A \vee \overline{B} \vee \left(\overline{A} \vee C\right)$

2 $F = A \rightarrow \overline{B} \vee C$

3 $F = B \vee \left(\overline{A} \leftrightarrow C\right)$

4 $F = \overline{B} \vee (A \leftrightarrow C)$

5 $F = A \wedge B \rightarrow \overline{B} \wedge C$

6 $F = A \wedge B \leftrightarrow \overline{B} \vee C$

7 $F = \left(A \vee \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \rightarrow C\right)$

8 $F = \left(A \rightarrow \overline{B}\right) \vee C$

9 $F = B \vee C \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{C}$

10 $F = \overline{B} \vee (A \wedge C \rightarrow B)$

11 $F = A \vee B \rightarrow \overline{B} \vee C$

12 $F = A \wedge B \leftrightarrow \overline{B} \vee C$

13 $F = A \rightarrow \overline{B} \vee \left(\overline{A} \vee C\right)$

14 $F = \overline{A} \wedge B \rightarrow \overline{B} \vee C$

15 $F = B \vee \left(\overline{A} \leftrightarrow C\right) \wedge A$

16 $F = A \leftrightarrow C \vee B \rightarrow A$

17 $F = A \leftrightarrow \overline{C} \vee B \rightarrow \overline{A}$

18 $F = (A \leftrightarrow C) \vee (B \rightarrow A)$

19 $F = A \leftrightarrow C \vee \left(B \rightarrow \overline{A}\right)$

20 $F = A \leftrightarrow (C \vee B \rightarrow A)$

21 $F = \left(\overline{A} \leftrightarrow C\right) \vee B \rightarrow A$

22 $F = \overline{A} \leftrightarrow \left(C \vee \overline{B} \rightarrow A\right)$

23 $F = A \wedge \left(B \rightarrow \overline{C}\right) \wedge C$

24 $F = A \wedge \left(B \leftrightarrow \overline{A}\right) \vee C$

25 $F = \left(C \vee \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \vee C\right)$

26 $F = A \rightarrow \overline{B} \vee (C \rightarrow B)$

27 $F = \left(A \wedge B \rightarrow \overline{B}\right) \wedge \left(C \vee \overline{A}\right)$

28 $F = \overline{B} \vee (A \leftrightarrow C) \wedge C$

29 $F = A \wedge B \rightarrow \overline{B} \wedge C$

30 $F = A \wedge B \leftrightarrow \overline{B} \vee C$

Задание 2

1 $(A \leftrightarrow B) \vee A\overline{B} \vee C$

2 $(A \rightarrow B) \vee A\overline{C} \vee BC$

3 $(AC \rightarrow B) \vee A\overline{C}$

4 $A\overline{B} \vee (A \leftrightarrow C)B$

5 $\left(\overline{A} \rightarrow B\right)\left(A\overline{C} \vee BC\right)$

6 $(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee AC$

7 $(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee BC$

8 $(C \leftrightarrow B) \vee A\overline{C} \vee BC$

9 $(BC \rightarrow A) \vee A\overline{C}$

10 $(AB \rightarrow C) \vee A\overline{C}$

11 $\left(\overline{A} \rightarrow C\right)\left(B\overline{C} \vee AB\right)$

12 $\left(\overline{A} \leftrightarrow B\right)(A \rightarrow BC)$

13 $(B \rightarrow C) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}C$

14 $\left(A \rightarrow \overline{B}C\right) \vee A\overline{B} \vee B\overline{C}$

15 $\left(AC \rightarrow \overline{B}\right) \vee B\overline{C}$

16 $B \vee (A \leftrightarrow CB) \vee A\overline{C}$

17 $(AC \rightarrow B) \vee AB\overline{C}$

18 $\left(\overline{A} \leftrightarrow C\right)\left(B\overline{C} \rightarrow AB\right)$

19 $(B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow AC)$

20 $(AB \rightarrow C) \vee A \vee \overline{A}C$

21 $(A \leftrightarrow C) \vee \left(A\overline{B} \rightarrow C\right)$

22 $\left(\overline{A}B \rightarrow \overline{C}\right) \vee ABC$

23 $(AB \rightarrow C) \vee A\overline{C}$

24 $\left(\overline{A} \rightarrow BC\right)(A \leftrightarrow C)$

25 $\left(\overline{A} \leftrightarrow B\right) \vee (A \rightarrow BC)$

26 $\left(\overline{A \rightarrow B}\right)\left(C\overline{A} \rightarrow B\right)$

27 $\left(A \rightarrow \overline{B}C\right) \vee A\overline{B} \vee BC$

28 $(A \rightarrow C) \vee A\overline{B} \vee BC$

29 $\left(\overline{A \rightarrow B}\right)\left(B\overline{A} \rightarrow C\right)$

30 $\left(AB \rightarrow \overline{C}\right) \vee A\overline{B}C$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы 1

Тема занятия: *логические операции; равносильность формул*

Цель выполнения задания: *научиться строить таблицы истинности логических высказываний и преобразовывать формулы, используя основные равносильности*

Необходимо знать: *основные понятия, формулы и правила алгебры логики*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила алгебры логики*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *Компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;* - *изучить схему решения задач;* - *выполнить задания практической работы;* - *сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое логика? 2 Что называется высказыванием? 3 Что такое утверждение? 4 Что называется рассуждением? 5 Что такое умозаключение? 6 Что такое логическое выражение? 7 Какие бывают логические выражения? 8 Что такое алгебра логики? 9 Понятие, обозначение и таблица истинности инверсии. 10 Понятие, обозначение и таблица истинности конъюнкции. 11 Понятие и обозначение и таблица истинности дизъюнкции. 12 Понятие, обозначение и таблица истинности импликации. 13 Понятие, обозначение и таблица истинности эквивалентности 14 Порядок действий в сложных логических выражений. 15 Способ изменения порядка действий в логических выражениях. 16 Понятие, обозначение и таблица истинности штриха Шеффера 17 Понятие, обозначение и таблица истинности стрелки Пирса 18 Понятие, обозначение и таблица истинности суммы по модулю два 19 Закон двойного отрицания 20 Законы идемпотентности 21 Коммутативные законы 22 Ассоциативные законы 23 Дистрибутивные законы 24 Законы де Моргана 25 Законы нуля и единицы 26 Законы поглощения 27 Закон исключенного третьего и закон противоречия*

28 Формула преобразования импликации 29 Формула преобразования эквивалентности

Литература:

1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова . - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.

2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.

3 Хаггарти Р. ***.*** *Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.*

4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.

5 http://rudocs.exdat.com/docs/index-59747.html

6 http://www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf7.html

7 http://informatika.sch880.ru/p25aa1.html

8 http://window.edu.ru/library/pdf2txt/659/47659/23617