

Практическая работа 2

Построение нормальных форм логической функции

Цель работы: Научиться строить конъюнктивные, дизъюнктивные, совершенные нормальные формы логической функции

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Элементарная конъюнкция – формула содержащая конъюнкцию отдельных элементарных высказываний, которые могут быть с отрицанием, и каждая переменная встречается не более одного раза.

2 Элементарная дизъюнкция – формула содержащая дизъюнкцию отдельных элементарных высказываний, которые могут быть с отрицанием, и каждая переменная встречается не более одного раза.

3 Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – это логическое выражение представляющее собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций, в которые входят элементарные высказывания или их отрицания.

4 Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это логическое выражение представляющее собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, в которые входят элементарные высказывания или их отрицания.

5 Совершенной дизъюнктивной нормальной (СДНФ) данной булевой функции называется такая ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных

6 Совершенной конъюнктивной нормальной (СКНФ) данной булевой функции называется такая КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных

7 Любая булева функция, не являющаяся тождественно равной нулю, имеет одну и только одну СДНФ. Любая булева функция, не являющаяся тождественно равной единице, имеет одну и только одну СКНФ.

Задание

1 Для заданной булевой функции $f(x, y, z)$:

- составить ДНФ;
- составить КНФ;
- найти двоичную форму булевой функции;
- составить СДНФ функции;
- составить СКНФ функции.

2 Для заданной булевой функции $f(x, y, z)$:

- преобразовать $f(x, y, z)$ в СДНФ;
- преобразовать $f(x, y, z)$ в КНФ.

Пример выполнения:

1 Исходные данные:

$$f = (\bar{x} \vee z) \leftrightarrow (x \rightarrow \bar{y}).$$

Решение:

1 Преобразуем данную функцию в ДНФ с помощью основных законов логики:

$$\begin{aligned} f &= (\bar{x} \vee z) \leftrightarrow (x \rightarrow \bar{y}) = ((\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z \vee \bar{x} \bar{y}) = \\ &= (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z \vee \bar{x} \bar{y}) = (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \bar{y} = \bar{x} \bar{z} (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z) \vee \\ &\vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \bar{y} = \bar{x} \bar{z} \bar{x} \vee \bar{x} \bar{z} z \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \bar{y} = (\bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \bar{y} = \\ &(\bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) z \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \bar{x} \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{x} z \vee \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{z} \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{y} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{y} z \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{x} z \vee \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} z \end{aligned}$$

2 Преобразуем данную функцию в КНФ с помощью основных законов логики:

$$\begin{aligned} f &= (\bar{x} \vee z) \leftrightarrow (x \rightarrow \bar{y}) = ((\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) (\bar{x} \vee z) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z \vee \bar{x} \bar{y}) = \\ &= (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee z \vee \bar{x} \bar{y}) = ((\bar{x} \vee \bar{x}) (\bar{z} \vee \bar{x}) \vee \bar{y}) (z \vee (\bar{x} \vee \bar{x}) (\bar{x} \vee \bar{y})) = (\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (z \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \end{aligned}$$

3 Для того, чтобы найти двоичную форму булевой функции, составим таблицу истинности функции $f = (\bar{x} \vee z) \leftrightarrow (x \rightarrow \bar{y})$:

x	y	z	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0

По результатам в последней колонке $f(x, y, z) = (11110110)$

4 Составим СДНФ функции. Функция принимает значение 1 на наборах 000, 001, 010, 011, 101, 110. Нулю соответствует переменная с отрицанием, единице – без отрицания. Получим СДНФ:

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z$$

5 Составим СКНФ функции. Функция принимает значение 0 на наборах 100, 111. Единице соответствует переменная с отрицанием, нулю – без отрицания. Получим СКНФ:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

2 Исходные данные:

$$f(x, y, z) = x \vee y \bar{z} \vee \bar{x} y z.$$

Решение:

1 Преобразуем $f(x, y, z)$ в СДНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \vee y \bar{z} \vee \bar{x} y z = x \cdot 1 \cdot 1 \vee 1 \cdot y \bar{z} \vee \bar{x} y z = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})y \bar{z} \vee \bar{x} y z = \\ &= (xy \vee x\bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee xy \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z = xy(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xy \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z = \\ &= xyz \vee xy \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z = xyz \vee xy \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \end{aligned}$$

2 Преобразуем данную функцию в КНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \vee y \bar{z} \vee \bar{x} y z = (x \vee y)(x \vee \bar{z}) \vee \bar{x} y z = ((x \vee y)(x \vee \bar{z}) \vee \bar{x})(x \vee y)(x \vee \bar{z}) \vee y((x \vee y)(x \vee \bar{z}) \vee z) = \\ &= (x \vee y \vee \bar{x})(x \vee \bar{z} \vee \bar{x})(x \vee y \vee y)(x \vee \bar{z} \vee y)(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{z} \vee z) = (x \vee y)(x \vee \bar{z} \vee y)(x \vee y \vee z) \end{aligned}$$

Задания к практической работе.

Задание 1

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	$(x \rightarrow (y \downarrow z)) \oplus y$	11	$(x \vee \bar{z}) \rightarrow (\bar{y} \downarrow z)$	21	$((x \downarrow \bar{y}) \leftrightarrow z) \oplus y$
2	$((x \mid z) \rightarrow y) \oplus \bar{z}$	12	$(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (z \oplus x)$	22	$(y \vee z) \rightarrow (x \leftrightarrow \bar{y})$
3	$((x \downarrow y) \rightarrow z) \leftrightarrow y$	13	$(y \vee z) \rightarrow (x \leftrightarrow \bar{y})$	23	$(\bar{y} \rightarrow z) \leftrightarrow (x \downarrow y)$
4	$((y \mid z) \rightarrow \bar{x}) \leftrightarrow z$	14	$(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \mid y)$	24	$(\bar{x} \wedge y) \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow x)$
5	$((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z}) \oplus x$	15	$(z \rightarrow \bar{x}) \leftrightarrow (x \downarrow y)$	25	$(x \downarrow \bar{y}) \rightarrow (y \leftrightarrow \bar{x})$
6	$(y \vee z) \rightarrow (x \leftrightarrow \bar{y})$	16	$(x \vee \bar{z}) \downarrow (y \vee z)$	26	$(z \rightarrow x) \leftrightarrow (y \vee x)$
7	$(x \downarrow y) \oplus (\bar{y} \rightarrow z)$	17	$(x \wedge \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{z} \vee y)$	27	$(x \leftrightarrow \bar{y}) \vee (z \rightarrow x)$
8	$((x \mid y) \rightarrow z) \leftrightarrow y$	18	$(\bar{x} \wedge z) \rightarrow (y \leftrightarrow x)$	28	$(x \rightarrow y) \wedge (\bar{y} \leftrightarrow z)$
9	$(\bar{x} \vee y) \rightarrow (y \leftrightarrow \bar{z})$	19	$(x \downarrow y) \oplus (\bar{y} \leftrightarrow z)$	29	$(x \vee \bar{z}) \downarrow (y \rightarrow z)$
10	$((x \leftrightarrow \bar{y}) \rightarrow z) \downarrow y$	20	$(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (z \rightarrow x)$	30	$(x \leftrightarrow y) \vee (\bar{z} \rightarrow x)$

Задание 2

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	$\bar{x}y \vee x\bar{z}$	9	$\bar{x}y \vee xy\bar{z} \vee y$	17	$\bar{x}y \vee y\bar{z} \vee xy$	25	$\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xy$
2	$xy \vee \bar{y}z \vee \bar{z}$	10	$y \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y$	18	$x \vee y\bar{z}$	26	$yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z$
3	$\bar{z} \vee x\bar{z} \vee yz$	11	$\bar{x}y \vee \bar{y}z$	19	$\bar{x}y \vee \bar{z} \vee \bar{x}y$	27	$\bar{x}y \vee x\bar{y}z$
4	$\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee \bar{z}$	12	$\bar{x}yz \vee \bar{z}$	20	$\bar{x}z \vee y\bar{z}$	28	$\bar{x}y \vee \bar{y}z$
5	$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee z$	13	$\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y$	21	$\bar{z} \vee \bar{x}y$	29	$\bar{y} \vee y\bar{z} \vee x$
6	$\bar{y} \vee \bar{x}z \vee y\bar{z}$	14	$xy\bar{z} \vee y$	22	$\bar{x}y \vee x\bar{z}$	30	$y\bar{z} \vee \bar{x}y$
7	$\bar{x} \vee y\bar{z} \vee xz$	15	$\bar{x}y \vee \bar{y}z$	23	$\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}y$	31	$y\bar{z} \vee x \vee \bar{x}y$
8	$z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y$	16	$\bar{x}yz \vee \bar{z}$	24	$\bar{x}y \vee \bar{z}$	32	$x\bar{z} \vee y \vee \bar{x}y$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы 2

Тема занятия: построение нормальных форм логической функции

Цель выполнения задания: научиться строить конъюнктивные, дизъюнктивные, совершенные нормальные формы логической функции

Необходимо знать: основные понятия, формулы и правила алгебры логики

Необходимо уметь: применять основные формулы и правила алгебры логики

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: Компьютерные программы не используются

Теория: Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы: 1 Что такое элементарная конъюнкция? 2 Что такое элементарная дизъюнкция? 3 Что такое ДНФ? 4 Что такое КНФ? 5 Что такое СКНФ? 6 Что такое СДНФ? 7 Теорема о единственности СКНФ и СДНФ.

Литература:

1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.

2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.

3 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.

4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.

5 <http://www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf7.html>

6 <http://window.edu.ru/library/pdf2txt/659/47659/23617>

7 <http://gendocs.ru/v26521>

8 <http://matica.org.ua/diskretnaya-matematika-kurs-lektsiy-v-n-semenchuk/tema-3-normalnie-formi>