

Практическая работа 4
Составление уравнений прямых
и кривых второго порядка

Цель работы: закрепить умения составлять уравнения прямых и кривых второго порядка

Содержание работы.

Основные понятия.

1 $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой на плоскости, $\vec{n} = \{A, B\}$ - вектор нормали.

2 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$ - уравнение прямой с направляющим вектором

$\vec{l} = \{m, p\}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

3 $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

4 $y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом, где k - тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

5 Координаты середины C отрезка AB , если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

6 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение эллипса. Параметры: a - большая полуось, b - малая полуось, $2c$ - расстояние между фокусами, $c^2 = a^2 - b^2$;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет.

7 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы. Параметры: a -

действительная полуось, b - мнимая полуось, $2c$ - расстояние между фокусами, $c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет.

8 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, R – радиус окружности.

9 $y^2 = 2px$ – каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс, ветви которой направлены вправо, p – параметр, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус, $x = -\frac{p}{2}$ – директриса.

10 $y = \frac{x^2}{2p}$ – каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, ветви которой направлены вверх, p – параметр, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – директриса.

Задание

1 Даны координаты вершин некоторого треугольника ABC. Требуется найти

- а) периметр треугольника ABC;
- б) уравнения сторон;
- в) уравнения медианы AM;
- г) уравнение высоты AH;
- д) уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно прямой BC.

2 Написать каноническое уравнение окружности, имеющей диаметр AB.

3 Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точку A симметрично относительно оси абсцисс для вариантов с четным номером и симметрично относительно оси ординат для задач с нечетным номером.

4 Написать каноническое уравнение эллипса

5 Написать каноническое уравнение гиперболы

Задание 1

Исходные данные:

Даны точки $A(2,1)$, $B(-6,-2)$, $C(-3,-1)$.

Решение:

а) $p = AB + BC + AC$. При вычислении длин сторон можно воспользоваться формулами из предыдущей практической, учитывая, что третья координата равна нулю, тогда $p = AB + BC + AC$

$$AB = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73},$$

$$AC = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29},$$

$$BC = \sqrt{(-6 - (-3))^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{(-6 + 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10},$$

$$p = \sqrt{73} + \sqrt{29} + \sqrt{10}.$$

б) уравнение AB : $\frac{x-2}{-6-2} = \frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-8} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3(x-2) = 8(y-1) \Rightarrow 3x - 8y + 2 = 0$

уравнение AC : $\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{-1-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow 2(x-2) = 5(y-1) \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0$

уравнение BC : $\frac{x+3}{-6+3} = \frac{y+1}{-2+1} \Rightarrow \frac{x+3}{-3} = \frac{y+1}{-1} \Rightarrow x+3 = 3(y+1) \Rightarrow x - 3y = 0$;

в) координаты середины отрезка BC : $x_M = \frac{-6-3}{2} = -\frac{9}{2}$, $y_M = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$,

тогда уравнение AM : $\frac{x-2}{-\frac{9}{2}-2} = \frac{y-1}{-\frac{3}{2}-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-\frac{13}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{x-2}{13} = \frac{y-1}{5}$;

г) для высоты $АН$ вектор $\overrightarrow{BC} = \{3, 1\}$ будет вектором нормали, тогда $3 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-1) = 0$, $3x - 6 + y - 1 = 0$, $3x + y - 7 = 0$;

д) в этом случае вектор $\overrightarrow{BC} = \{3, 1\}$ будет направляющим вектором для искомой прямой: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1}$.

Задание 2

Исходные данные:

Даны точки $A(2,1)$, $B(-6,-2)$

Решение:

Центр окружности – середина отрезка AB : $x_{M_0} = \frac{2-6}{2} = -2$,

$y_{M_0} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$, $R = \frac{\sqrt{73}}{2}$ тогда уравнение окружности:

$$(x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2, \quad (x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{73}{4}.$$

Задание 3

Исходные данные:

Дана точка $A(2,-3)$

Решение:

а) Уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс: $y^2 = 2px$,
 находим параметр p $(-3)^2 = 2 \cdot p \cdot 2$, $4p = 9$, $4p = 9$ $p = \frac{9}{4}$.

Искомое уравнение: $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{4}x$ $y^2 = \frac{9}{2}x$.

б) Уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат: $y = \frac{x^2}{2p}$,

находим параметр p $-3 = \frac{4}{2p}$, $2p = -\frac{4}{3}$.

Искомое уравнение: $y = \frac{x^2}{-\frac{4}{3}}$; $y = -\frac{3x^2}{4}$.

Задание 4**Исходные данные:**

Даны $b = 2$, $c = 1$.

Решение:

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a^2 = b^2 + c^2$,

$a^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, получаем $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Задание 5**Исходные данные:**

Даны $c = 4$, $\varepsilon = 1,2$.

Решение:

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$,

$a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{1,2} = \frac{10}{3}$ $b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 16 - \frac{100}{9} = \frac{144}{9}$,

итак, получаем $\frac{x^2}{\frac{100}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{9}} = 1$.

Задания к практической работе.

Задание 1

1 A (6; 3); B (-6; -2); C (-10; 1)	2 A (-1; 7); B (11; 2); C (17; 10)
3 A (7; 2); B (-5; -3); C (-9; 0)	4 A (0; 7); B (12; 2); C (18; 10)
5 A (5; 3); B (-7; -2); C (-11; 1)	6 A (-2; 7); B (10; 2); C (16; 10)
7 A (5; 7); B (-7; 2); C (-11; 5)	8 A (-3; 8); B (9; 3); C (15; 1)
9 A (9; 1); B (-3; -4); C (-7; -1)	10 A (-2; 9); B (10; -4); C (16; 12)
11 A (-4; 6); B (8; -10); C (11; 11)	12 A (-6; 8); B (6; -8); C (9; 13)
13 A (-8; 10); B (4; -6); C (7; 15)	14 A (-10; 4); B (2; -12); C (5; 9)
15 A (-2; 7); B (10; -9); C (13; 12)	16 A (-5; 9); B (7; 7); C (10; 14)
17 A (-3; 11); B (9; -5); C (12; 16)	18 A (-7; 13); B (5; -3); C (8; 18)
19 A (-11; 12); B (1; -4); C (4; 17)	20 A (-9; 5); B (3; -11); C (6; 10)
21 A (1; 2); B (2; -2); C (6; 1)	22 A (2; -2); B (6; 1); C (-2; 0)
23 A (1; -2); B (5; 4); C (-2; 0)	24 A (1; -1); B (-2; 1); C (3; 5)
25 A (2; -2); B (3; -5); C (5; 7)	26 A (3; 2); B (5; -2); C (1; 0)
27 A (2; 3); B (1; -4); C (-4; 2)	28 A (0; 6); B (10; -2); C (4; 8)
29 A (5; -4); B (-1; -3); C (-3; -2)	30 A (2; 1); B (-1; -1); C (3; 2)
31 A (6; 3); B (1; 1); C (-9; 2)	32 A (2; 1); B (-6; -2); C (-3; -1)

Задание 2

1 A (2; 3); B (6; 1)	2 A (1; 4); B (-3; 2)
3 A (-4; 5); B (2; 2)	4 A (-7; 3); B (4; 2)
5 A (1; 1); B (3; -5)	6 A (4; 6); B (-4; 7)
7 A (-5; -8); B (-2; 0)	8 A (-1; 2); B (5; 1)
9 A (3; 6); B (2; 2)	10 A (4; 4); B (-1; 3)
11 A (4; 5); B (3; 2)	12 A (-5; 5); B (-3; 3)
13 A (0; -3); B (6; 2)	14 A (-10; 2); B (-8; 1)
15 A (3; -2); B (4; 1)	16 A (7; 7); B (12; 4)
17 A (2; 7); B (6; -2)	18 A (-4; 5); B (0; 6)
19 A (4; 9); B (2; 8)	20 A (5; 5); B (-3; 6)
21 A (8; 8); B (4; 6)	22 A (-8; 9); B (-7; 7)

23 A (2; 3); B (5; 8)	24 A (0; 8); B (4; 5)
25 A (3; 6); B (7; 5)	26 A (6; 3); B (-2; 6)
27 A (3; 7); B (7; 9)	28 A (-6; 6); B (-3; 9)
29 A (9; 5); B (5; 7)	30 A (2; -7); B (1; -9)
31 A (6; 3); B (1; 1)	32 A (2; 1); B (-6; -2)

Задание 3

1 A(6; 3)	2 A(8; -3)	3 A(2; 1)	4 A(-1; 5)
5 A(7; 2)	6 A(4; 5)	7 A(-1; 5)	8 A(-6; 4)
9 A(-7; 3)	10 A(7; 1)	11 A(4; 2)	12 A(9; 3)
13 A(4; 1)	14 A(2; -2)	15 A(6; -2)	16 A(4; -3)
17 A(1; -1)	18 A(4; -1)	19 A(5; 1)	20 A(6; 3)
21 A(3; -3)	22 A(-5; 3)	23 A(8; 1)	24 A(-4; 4)
25 A(4; 4)	26 A(7; 6)	27 A(3; -5)	28 A(9; 1)
29 A(5; 6)	30 A(-5; 2)	31 A(2; -3)	32 A(6; 3)

Задание 4

1 a = 5; c = 4	2 c = 1; $\varepsilon = 0,5$
3 b = 2; c = 1	4 a = 5; c = 2
5 a = 3; $\varepsilon = \frac{1}{3}$	6 b = 1; c = 2
7 a = 2; c = 1	8 c = 2; $\varepsilon = \frac{2}{3}$
9 a = $\sqrt{5}$; c = $\sqrt{3}$	10 a = 5; $\varepsilon = 0,8$
11 a = 2; $\varepsilon = 0,5$	12 b = $2\sqrt{6}$; c = 5
13 c = 3; $\varepsilon = 0,6$	14 a = 5; c = 3
15 b = 3; c = 2	16 c = 3; $\varepsilon = 0,5$
17 a = $\sqrt{2}$; c = 1	18 a = 10; $\varepsilon = 0,8$
19 a = 4; $\varepsilon = 0,5$	20 c = 3; $\varepsilon = \frac{3}{4}$
21 c = 1; $\varepsilon = \frac{1}{3}$	22 b = $\sqrt{7}$; c = $\sqrt{2}$
23 b = 4; c = 3	24 c = 7; $\varepsilon = 0,7$

25 $a = 3; c = 1$	26 $a = 10; \varepsilon = 0,6$
27 $c = 4; \varepsilon = 0,8$	28 $b = 5; c = 2\sqrt{6}$
29 $a = 5; \varepsilon = 0,6$	30 $b = 3; c = 4$
31 $b = 2; c = 1$	32 $a = \sqrt{2}; c = 1$

Задание 5

1 $b = 3; c = 6$	2 $c = 5; \varepsilon = 1,25$
3 $a = 2; \varepsilon = 6$	4 $b = 2; c = 3$
5 $c = 7; \varepsilon = \frac{14}{3}$	6 $a = 3; \varepsilon = \frac{10}{3}$
7 $a = \sqrt{7}; c = 3$	8 $c = 4; \varepsilon = 8$
9 $b = 1; c = \sqrt{2}$	10 $c = 5; \varepsilon = \frac{5}{3}$
11 $a = 4; \varepsilon = 8$	12 $a = 5; c = 7$
13 $a = 3; c = 6$	14 $a = 2\sqrt{3}; c = 3\sqrt{2}$
15 $a = 4; \varepsilon = 1,25$	16 $a = 3; c = 5$
17 $b = 3; c = 2$	18 $a = 4; \varepsilon = 2$
19 $a = 7; c = 8$	20 $b = 4; c = 5$
21 $c = 3; \varepsilon = 1,25$	22 $a = 4; c = 5$
23 $b = 3; c = 5$	24 $c = 6; \varepsilon = 2$
25 $a = 3; \varepsilon = \frac{5}{3}$	26 $b = 4; c = 5$
27 $a = 2; c = 3$	28 $a = 3; \varepsilon = 4$
29 $c = 4; \varepsilon = 1,2$	30 $b = 3; c = 5$
31 $a = 7; c = 8$	32 $a = 3; c = 6$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы 4

Тема занятия: *составление уравнений прямых и кривых второго порядка*

Цель выполнения задания: *закрепить умения составлять уравнения прямых и кривых второго порядка*

Необходимо знать: *основные формулы и правила работы с уравнениями прямых и кривых второго порядка*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила работы с уравнениями прямых и кривых второго порядка*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: 1 Общее уравнение прямой 2 Каноническое уравнение прямой 3 Уравнение прямой, проходящей через две точки 4 Уравнение прямой с угловым коэффициентом 5 Координаты середины отрезка 6 Каноническое уравнение эллипса 7 Что такое эксцентриситет? 8 Каноническое уравнение окружности 9 Каноническое уравнение гиперболы 10 Асимптоты гиперболы 11 Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс 12 Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат 13 Что такое директриса?

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин *Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1*
- 2 И.Л.Соловейчик *Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003*
- 3 Н.В. Богомолов *Сборник задач по математике, -М, 2006*
- 4 <http://www.cleverstudents.ru>
- 5 <http://www.coolreferat.com>