

Практическая работа №7.

Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов

Цель: закрепить навыки применения первого и второго замечательных пределов

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = 1$. Из него вытекает

цепочка эквивалентностей : при $x \rightarrow 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \operatorname{arcsin} x, \cos x \sim 1$$

2 Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \{1^\infty\} = e$ или

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \{1^\infty\} = e$$

Задание

Найти значения выражений с помощью первого и второго замечательных пределов

Пример выполнения:

Исходные данные:

Вычислить значения выражений с использованием замечательных пределов.

Задание 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 6x \cdot \cos 7x}{\sin 3x \cdot \operatorname{arcsin}^2 x}$

Задание 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{arctg}^2 5x}$

Задание 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{4x+1}$

Задание 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x+5} \right)^{6x+3}$

Решение:

Задание 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 6x \cdot \cos 7x}{\sin 3x \cdot \arcsin^2 x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)^3 \cdot 1}{3x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{216x^3}{3x^3} = 72.$$

Задание 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{arctg}^2 5x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 4x}{(5x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(4x)^2}{25x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 16x^2}{25x^2} = \frac{32}{25}.$$

Задание 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{4x+1} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}} \right)^{\frac{x-2}{5} \cdot 5(4x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(4x+1)}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x}{x}} = e^{20}.$$

Задание 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x+5} \right)^{6x+3} &= \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+5-5+2}{7x+5} \right)^{6x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+5-3}{7x+5} \right)^{6x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{7x+5} \right)^{6x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{7x+5}{-3}} \right)^{6x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{7x+5}{3}} \right)^{-\frac{7x+5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{7x+5} \right) (6x+3)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{7x+5} \right) (6x+3)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{3(6x+3)}{7x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{18x}{7x}} = e^{-\frac{18}{7}} \end{aligned}$$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \cos 5x}{\sin 2x}$	2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x \cdot \cos 2x}{\cos 3x \cdot \arcsin^2 x}$	3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \cos 3x}{\sin 2x}$
4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x \cos 9x}$	5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}$	6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cos 6x}{\sin 5x}$
7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \cdot \cos 8x}{\sin 4x \cdot \arcsin x}$	8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 4x}{\arcsin 5x}$	9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{\arcsin 2x}$
10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 3x}{\arcsin^2 2x}$	11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{3x \sin 3x \cos 9x}$	12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 2x \arcsin^3 4x}{\sin 3x \cos 9x}$
13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 2x \arcsin 4x}{\sin 3x \cos 9x}$	14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \arcsin 4x}{\sin^3 2x \cos 9x}$	15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 5x \cdot \cos 3x}{\sin 4x \cdot \arcsin^2 6x}$
16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 9x}{5x \sin^2 3x \cos 2x}$	17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{ctg} 5x}{\arcsin 2x}$	18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\arcsin 7x}$
19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 5x}$	20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cos 4x}{\sin 9x \arcsin 5x}$	21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \arcsin 3x}{\sin^3 4x \cos 5x}$
22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \arcsin 5x}{\sin^2 3x \cos 4x}$	23 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \operatorname{ctg} x}{\arcsin 3x}$	24 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x \cos 6x}{\sin^2 5x}$
25 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos 3x}{\arcsin 2x}$	26 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x \cdot \cos 3x}{\sin 2x \cdot \arcsin x}$	27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 \operatorname{ctg} 3x}{\arcsin 2x}$
28 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 3x}{\arcsin 2x}$	29 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x \arcsin^3 5x}{\sin 2x \cos 4x}$	30 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x \cdot \cos 8x}{\sin 4x \cdot \arcsin x}$

Задание 2

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$	2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x) \cdot \cos 2x}{\sin^2 3x}$	3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\arcsin^2 2x}$
4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 - \cos 6x)}{(1 + \cos 2x) \sin 9x}$	5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$	6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(1 - \cos 6x)}{(1 + \cos 4x) \arcsin 9x}$
7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\arcsin^2 2x}$	8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{(1 - \cos 6x) \cos 9x}$	9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$
10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x \sin 2x}$	11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \operatorname{tg} 2x}{1 - \cos 6x}$	12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x \arcsin^3 4x}{1 - \cos 6x}$
13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x \arcsin 4x}{1 - \cos 6x}$	14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \arcsin 4x}{(1 - \cos 2x) \cos 9x}$	15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 5x \cdot \cos 3x}{\sin 4x \cdot (1 - \cos 8x)}$

16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 9x}{5x(1 - \cos 4x)\cos 2x}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 \operatorname{ctg} 5x}{1 - \cos 2x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)\operatorname{ctg} 2x}{\arcsin 7x}$
19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)\cos 6x}{\operatorname{tg}^2 5x}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cos 4x}{(1 - \cos 10x)}$	21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \arcsin 3x}{\sin 4x(1 - \cos 2x)}$
22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \arcsin 5x}{(1 - \cos 6x)\cos 4x}$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 4x)\operatorname{ctg} x}{\arcsin 3x}$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x \cos 6x}{(1 - \cos 10x)}$
25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)\cos 3x}{5x \arcsin 2x}$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x) \cdot \cos 3x}{\sin 2x \cdot \arcsin x}$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7(1 - \cos 2x)\operatorname{ctg} 3x}{\arcsin 2x}$
28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)\cos 3x}{\arcsin^2 2x}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x(1 - \cos 2x)\arcsin 5x}{\sin 2x \cos 4x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \arcsin 4x}{(1 - \cos 2x)\cos 9x}$

Задание 3

1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}$	2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+1}$	3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x+1}$	5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}$
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$	9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2-1}\right)^{3x^2+1}$
10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$	11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}$	12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{3x-1}$
13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x^2}\right)^{2x^2-1}$	14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{3x-4}$	15	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2+1}\right)^{2x^2+1}$
16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{3x-5}$	17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{5x+3}$	18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5x}$
19	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x+1}$	20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5x-3}$	21	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x+1}\right)^{x-4}$
22	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{2x-1}$	23	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{4x}$	24	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{3x+1}$
25	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x+1}\right)^{3x}$	26	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{5x+3}$	27	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x-2}\right)^{x+1}$
28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2+1}\right)^{3x^2+2}$	29	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-1}\right)^{3x+1}$	30	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{3x-5}$

Задание 4

1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$	2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x+5} \right)^{7x+3}$	3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^x$
4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^x$	5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^x$	6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x$
7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{5+x} \right)^{2x}$	8 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+3}$	9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5} \right)^{4x+7}$
10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{3x+1}$	11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-4} \right)^{3x}$	12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+1} \right)^{x-5}$
13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{3x+2}$	14 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1}$	15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{3x+4}$
16 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{5x+1}$	17 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x}$	18 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{5x}$
19 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+5} \right)^{2x+3}$	20 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{3x+5}$	21 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{5-x} \right)^{3x}$
22 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+3}{3x-1} \right)^{2x-1}$	23 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x+3} \right)^{2x-3}$	24 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{x+3}$
25 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-4}{6x+1} \right)^{4x+5}$	26 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-3} \right)^{2x+1}$	27 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x-3} \right)^{2x+3}$
28 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{5x-3} \right)^{2x+1}$	29 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+5} \right)^{3x+7}$	30 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^{5x+2}$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы 7

Тема занятия: *Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов*

Цель выполнения задания: *закрепить навыки применения первого и второго замечательных пределов*

Необходимо знать: *основные формулы и правила вычисления пределов функций с помощью первого и второго замечательных пределов*

Необходимо уметь: *основные формулы и правила вычисления пределов функций с помощью первого и второго замечательных пределов*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: *- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Какую неопределенность раскрывает первый замечательный предел? 2 Какие функции эквивалентны друг другу при $x \rightarrow 0$? 4 Чему эквивалентен $\cos^2 10x$ при $x \rightarrow 0$? 5 Какую неопределенность раскрывает второй замечательный предел? 6 Какие неопределенности возникают при раскрытии второго замечательного предела? 7 Формула первого замечательного предела 8 Формула второго замечательного предела*

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012

4 <http://ru.wikipedia.org>

5 http://www.mathprofi.ru/zamechatelnye_predely.html

6 http://www.cleverstudents.ru/limits/the_second_remarkable_limit.html

7 http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_18.php