

Практическая работа 8

Исследование функции на непрерывность и точки разрыва

Цель: закрепить навыки исследования функции на непрерывность и точки разрыва

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Функция непрерывна в точке k , если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$

2 Определение включает условия:

– функция должна быть определена в точке k , то есть должно существовать значение $f(k)$;

– должен существовать общий предел функции $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow k+0} f(x)$;

– предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$.

3 Если в точке k нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, но не равны, то она называется точкой разрыва первого рода

4 Если хотя бы один из пределов $f(k-0)$ или $f(k+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка k называется точкой разрыва второго рода.

5 Если существуют левый и правый пределы функции в точке и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции $f(x)$ в точке k : $f(k) \neq f(k-0) = f(k+0)$ или функция $f(k)$ не определена в точке k , то точка k называется точкой устранимого разрыва

Задание

Исследовать функцию на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют.

Примеры выполнения:

Исходные данные:

Задание 1 $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x; & x > 2 \end{cases}$

Задание 2 $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$

Задание 3 $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4}$; $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$

Задание 4 $f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1$

Решение:

Задание 1

Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$; $[1; 2]$; $(2; +\infty)$. Тогда, разрыв возможен только на концах указанных промежутков, то есть в точках $x = 1$ и $x = 2$. Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 = 0$$

Односторонние пределы в $x = 1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = 1$ разрыв первого рода.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (3-x) = 1; \quad f(2) = 1$$

Односторонние пределы и значение функции в точке $x = 2$ равны, значит точка $x = 2$ – точка непрерывности

Задание 2

Функция $f(x) = \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$ не определена, если $x-3=0$ и $x+1=0$, т.к. эти выражения находятся в знаменателе, значит точки разрыва $x = 3$ и $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = 3$ равны бесконечности, значит в точке $x = 3$ разрыв второго рода.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{10^{\frac{1}{x-3}}}{x+1} = \infty$$

Односторонние пределы в $x = -1$ равны бесконечности, значит в точке $x = -1$ разрыв второго рода.

Задание 3

а) Функция не определена, если $x+4=0$, т.к. это выражение находится в знаменателе, значит точка разрыва $x = -4$

Разложим числитель функции $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x + 4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$D = 49 + 32 = 81 = 9^2; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(2x-1)}{x+4} = 2x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} (2x-1) = -9; \quad \lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} (2x-1) = -9$$

Существуют левый и правый пределы функции в точке $x = -4$ и они равны друг другу, но функция $f(x)$ не определена в точке -4 , значит точка -4 – точка устранимого разрыва

б) Разложим знаменатель функции $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4}$ на множители, для этого найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$f(x) = \frac{x+4}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{x+4}{(x+4)(2x-1)} = \frac{1}{2x-1}$$

Функция $f(x)$ не определена в точках -4 и $0,5$

Точка -4 – точка устранимого разрыва, т.к. $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{9}$;

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{9}$$

$\lim_{x \rightarrow 0,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5-0} \frac{1}{2x-1} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0,5+0} \frac{1}{2x-1} = \infty \Rightarrow$ в точке $x = 0,5$ разрыв второго рода.

Задание 4

$$f(x) = x^2 - \frac{|x+1|}{x+1} - 1 = \begin{cases} x^2 - \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2 + \frac{x+1}{x+1} - 1 = x^2; & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2; & x \geq -1 \\ x^2; & x < -1 \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 - 2 = -1$$

Односторонние пределы в $x = -1$ существуют, но значения их различны, значит в точке $x = -1$ разрыв первого рода.

Задания к практической работе.

Задание 1

1	$f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -1 \\ x^2+1; & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3; & x > 1 \end{cases}$	2	$f(x) = \begin{cases} x^2+1; & x \leq 0 \\ 1+2x; & 0 < x < 2 \\ x-2; & x \geq 2 \end{cases}$	3	$f(x) = \begin{cases} 2; & x < -1 \\ 2-2x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2}; & x < -2 \\ 2; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x}; & x > 2 \end{cases}$	5	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \operatorname{tg} x; & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	6	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ \frac{1}{x-2}; & x \geq 2 \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -1 \\ 2+3x; & -1 \leq x < 1 \\ \ln x; & x \geq 1 \end{cases}$	8	$f(x) = \begin{cases} x^3+1; & x \leq -1 \\ 1+2x; & -1 < x < 2 \\ x-1; & x \geq 2 \end{cases}$	9	$f(x) = \begin{cases} 2; & x \leq -2 \\ x^2; & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3; & x > 1 \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases} -x+1; & x \leq -1 \\ x^2-1; & -1 \leq x \leq 2 \\ 3; & x > 2 \end{cases}$	11	$f(x) = \begin{cases} x+4; & x < -1 \\ x^2+2; & -1 \leq x < 1 \\ 2x; & x \geq 1 \end{cases}$	12	$f(x) = \begin{cases} x; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x < 1 \\ x-1; & x \geq 1 \end{cases}$
13	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3); & x \leq 1 \\ 6-5x; & 1 < x < 3 \\ x-3; & x \geq 3 \end{cases}$	14	$f(x) = \begin{cases} (x-1)^4; & x < 1 \\ 7-2x; & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{x-3}-4; & x > 3 \end{cases}$	15	$f(x) = \begin{cases} 1; & x < -2 \\ \frac{1}{x}; & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2-4x+\frac{9}{2}; & x > 2 \end{cases}$
16	$f(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ 2^x; & 0 \leq x < 2 \\ 4; & x \geq 2 \end{cases}$	17	$f(x) = \begin{cases} e^x; & x \leq 0 \\ \cos x; & 0 < x \leq 2\pi \\ 10-x; & x > 2\pi \end{cases}$	18	$f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \leq 0 \\ x^2+1; & 0 < x < 1 \\ x; & x \geq 1 \end{cases}$
19	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < 0 \\ x^2; & 0 \leq x \leq 2 \\ 5-x; & x > 2 \end{cases}$	20	$f(x) = \begin{cases} 0; & x < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x; & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x; & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	21	$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3; & x < 1 \\ 3-2x; & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{x-2}-1; & x > 2 \end{cases}$

22	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x^2 + 1); & x \leq 1 \\ 6 - 5x; & 1 < x < 3 \\ x + 5; & x \geq 3 \end{cases}$	23	$f(x) = \begin{cases} x + 2; & x \leq -2 \\ x^2 - 4; & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{-x + 2}; & x > 2 \end{cases}$	24	$f(x) = \begin{cases} x + 1; & x < -1 \\ x^2 + 1; & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{1 - x}; & x \geq 1 \end{cases}$
25	$f(x) = \begin{cases} 2 - x; & x \leq -2 \\ x^2 - 1; & -2 < x \leq 1 \\ -2x + 3; & x > 1 \end{cases}$	26	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < 0 \\ x^2 + 1; & 0 \leq x \leq 3 \\ -x + 3; & x > 3 \end{cases}$	27	$f(x) = \begin{cases} (x + 2)^4; & x < -2 \\ 7 - 2x; & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x - 1} - 2; & x > 1 \end{cases}$
28	$f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \leq 0 \\ \sin x; & 0 < x \leq 2\pi \\ \operatorname{tg} x; & x > 2\pi \end{cases}$	29	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x \leq 0 \\ x^2 + 1; & 0 < x \leq 3 \\ 2x + 4; & x > 3 \end{cases}$	30	$f(x) = \begin{cases} x + 2; & x < -2 \\ x^2 + 1; & -2 \leq x \leq 1 \\ -x + 3; & x > 1 \end{cases}$

Задание 2

1	$f(x) = \frac{2^{x+1}}{3-x}$	2	$f(x) = \frac{e^{1-x}}{x-2}$	3	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{4-x^2}}}{1-x}$	4	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-x-2}}}{1+x}$
5	$f(x) = \frac{2^{\frac{x}{9-x^2}}}{1+x}$	6	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{1-x^2}}}{1-2x}$	7	$f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}$	8	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{4-x}$
9	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{3-x}}}{x-2}$	10	$f(x) = \frac{4^{\frac{1}{9-x^2}}}{1-x}$	11	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{5+x}$	12	$f(x) = \frac{4^{\frac{1}{1-x^2}}}{4-x}$
13	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-1}}}{1+2x}$	14	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{4-x^2}$	15	$f(x) = \frac{3^{\frac{1}{1-x}}}{x-2}$	16	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
17	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{3-x}}}{x-1}$	18	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{1+x}$	19	$f(x) = 3^{\frac{1}{x(x^2-9)}}$	20	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{x-x^2}$
21	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{9-x^2}$	22	$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2-16}$	23	$f(x) = \frac{6^{\frac{1}{9-x^2}}}{6-x}$	24	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{4-x}$
25	$f(x) = \frac{6^{\frac{1}{25-x^2}}}{6-x}$	26	$f(x) = \frac{7^{\frac{1}{2x^2+9x-18}}}{1+x}$	27	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-3}}}{1-x^2}$	28	$f(x) = \frac{7^{\frac{1}{2x^2-5x+3}}}{2+x}$
29	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{1-4x^2}$	30	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-6x-7}}}{7-x}$	31	$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}}}{16-x^2}$	32	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x^2-3x+2}}}{1+3x}$

Задание 3

1 $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	2 $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$	3 $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
4 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$	5 $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$	6 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
7 $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$	8 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$	9 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$
10 $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}$	11 $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 7x + 5}$	12 $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$
13 $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 1}$	14 $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$	15 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
16 $f(x) = \frac{x - 2}{x^3 - 8}$	17 $f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 6}{x - 3}$	18 $f(x) = \frac{\cos 3x}{3x}$
19 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$	20 $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7}$	21 $f(x) = \frac{x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$
22 $f(x) = \frac{4x^2 + 7x - 2}{x + 2}$	23 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	24 $f(x) = \frac{x - 4}{3x^2 - 11x - 4}$
25 $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$	26 $f(x) = \frac{x + 3}{5x^2 + 14x - 3}$	27 $f(x) = \frac{x + 4}{x^3 + 64}$
28 $f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}$	29 $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$	30 $f(x) = \frac{x + 6}{2x^2 + 9x - 18}$

Задание 4

1 $f(x) = x - \frac{ x - 5 }{x - 5} - 4$	2 $f(x) = \frac{ x^2 - x }{x^2 - x}$	3 $f(x) = -\frac{ 2x + 6 }{2x + 6} - x^2$
4 $f(x) = \frac{ 2x + 1 }{2x + 1} + x^2 - 2$	5 $f(x) = x^2 - \frac{ 2x - 8 }{2x - 8} - 5$	6 $f(x) = x - \frac{ 3x - 9 }{3x - 9} + 1$
7 $f(x) = -\frac{ 3x + 6 }{3x + 6} - 1$	8 $f(x) = x - \frac{ x - 7 }{x - 7} - 1$	9 $f(x) = -\frac{ x + 3 }{x + 3} - x^2 + x$
10 $f(x) = \frac{ 3x + 1 }{3x + 1} + x^2 - 1$	11 $f(x) = \frac{ x - 4 }{x - 4} + 3$	12 $f(x) = \frac{ 2x - 3 }{2x - 3} + x^2 + 1$
13 $f(x) = -\frac{ 3x + 2 }{3x + 2} - x + 1$	14 $f(x) = \frac{ x^3 - x^2 }{x^3 - x^2} + 1$	15 $f(x) = x^2 - \frac{4x + 8}{ 4x + 8 } - 5$
16 $f(x) = x^2 - \frac{3x + 2}{ 3x + 2 } - \frac{1}{9}$	17 $f(x) = \frac{ 3x - 5 }{3x - 5} + x^2 + \frac{2}{9}$	18 $f(x) = \frac{ x - 6 }{x - 6} + 3 - x$

19	$f(x) = -\frac{ x+7 }{x+7} + 2x$	20	$f(x) = x^2 - \frac{ 3x-7 }{3x-7} + \frac{1}{9}$	21	$f(x) = \frac{ 3x+4 }{3x+4} - x + \frac{1}{3}$
22	$f(x) = x^2 + \frac{2x+4}{ 2x+4 } - 5$	23	$f(x) = \frac{ x-1 }{x-1} + 3 - x$	24	$f(x) = \frac{ x^2-x }{x^2-x} + x$
25	$f(x) = x^2 - \frac{ 2x-7 }{2x-7} - 3$	26	$f(x) = x^2 - \frac{3x+8}{ 3x+8 } - \frac{1}{9}$	27	$f(x) = \frac{ x-5 }{x-5} + 2 - x$
28	$f(x) = x^2 - \frac{ 3x-5 }{3x-5} + \frac{2}{9}$	29	$f(x) = \frac{ x-1 }{x-1} + 2 - x^2$	30	$f(x) = x^3 - \frac{2x+4}{ 2x+4 } - 1$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Непрерывность функции в точке
- 2 Условия непрерывности функции в точке
- 3 Что такое точка разрыва первого рода?
- 4 Что такое точка разрыва второго рода?
- 5 Что такое точка устранимого разрыва?

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012
- 4 <http://ru.wikipedia.org>
- 5 http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html
- 6 <http://www.cleverstudents.ru>
- 7 http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_23.php
- 8 http://www.cleverstudents.ru/limits/break_points_classification.html