

Практическая работа 9

Вычисление производных сложных функций

Цель: закрепить навыки вычисления производных сложных функций

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Производной функции $f(x)$ называется $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

2 Правила дифференцирования:

– $(u \pm v)' = u' \pm v'$

– $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

– $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

– $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

3 Таблица производных:

– $(C)' = 0$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \alpha \neq -1; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

– $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$

– $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

– $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

– $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

– $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

– $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4 Сложной функцией называется функция вида $z = f(u(x))$.

5 Производная сложной функции вычисляется по формуле $z' = f'(u(x))u'(x)$.

6 Логарифмическое дифференцирование. Метод применяется для дифференцирования функций вида $y = u(x)^{v(x)}$ или громоздких функций:

- прологарифмировать функцию $\ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v \cdot \ln u$;
- найти производную, учитывая, что $y = y(x)$: $\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$;
- выразить производную и подставить y : $y' = y \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$

Задания

- 1 Найти производные, используя правила дифференцирования.
- 2 Найти производные сложных функций.
- 3 Найти производную сложной функции, используя метод логарифмического дифференцирования.

Примеры выполнения:

Исходные данные:

Задание 1 $y = 3x^4 + 4^x - \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$

Задание 2 $y = (2x^3 - 3x^2) \operatorname{ctg} 4x$

Задание 3 $f(x) = \frac{x+6}{2x^2+9x-18}$

Задание 4 $y = \sqrt{\frac{\cos 4x + x^2}{4x}}$

Задание 5 $y = \sqrt{2 \operatorname{tg}^3 2x}$

Задание 6 $y = x^{\cos x}$

Решение:

Задание 1

Используя таблицу производных, найдем

$$y' = 3 \cdot 4x^3 + 4^x \ln 4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 12x^3 + 4^x \ln 4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Задание 2

Воспользуемся правилом нахождения производной произведения и таблицей производных:

$$\begin{aligned}y' &= (6x^2 - 6x) \operatorname{ctg} 4x - (2x^3 - 3x^2) \cdot \frac{4}{\sin^2 4x} = \frac{6x(x-1) \operatorname{ctg} 4x \sin^2 4x - 4x^2(2x-3)}{\sin^2 4x} = \\ &= \frac{6x(x-1) \operatorname{ctg} 4x \sin^2 4x - 4x(2x-3)}{\sin^2 4x} = \frac{6x(x-1) \frac{\cos 4x}{\sin 4x} \sin^2 4x - 4x^2(2x-3)}{\sin^2 4x} = \\ &= \frac{3x(x-1) \cdot 2 \cos 4x \sin 4x - 4x^2(2x-3)}{\sin^2 4x} = \frac{3x(x-1) \sin 8x - 4x^2(2x-3)}{\sin^2 4x}\end{aligned}$$

Задание 3

Воспользуемся правилом нахождения производной частного и таблицей производных:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x^2 + 9x - 18 - (x+6)(4x+9)}{(2x^2 + 9x - 18)^2} = \frac{2x^2 + 9x - 18 - (4x^2 + 24x + 9x + 54)}{(2x^2 + 9x - 18)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 9x - 18 - 4x^2 - 24x - 9x - 54}{(2x^2 + 9x - 18)^2} = \frac{-6x^2 - 24x - 72}{(2x^2 + 9x - 18)^2} = \frac{-6(x^2 + 4x + 12)}{(2x^2 + 9x - 18)^2}\end{aligned}$$

Задание 4

Воспользуемся правилами нахождения производной сложной функции, частного и таблицей производных:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\cos 4x + x^2}{4x}}} \cdot \frac{(-4 \sin 4x + 2x)4x - 4(\cos 4x + x^2)}{16x^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\cos 4x + x^2}} \cdot \frac{2x^2 - 4x \sin 4x - \cos 4x - x^2}{4x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\cos 4x + x^2}} \cdot \frac{x^2 - 4x \sin 4x - \cos 4x}{4x^2} = \frac{x^2 - 4x \sin 4x - \cos 4x}{4x\sqrt{x(\cos 4x + x^2)}}\end{aligned}$$

Задание 5

Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции и таблицей производных:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2\operatorname{tg}^3 2x}} \cdot 3 \cdot 2\operatorname{tg}^2 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{3\sqrt{2\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}$$

Задание 6

$$1 \quad \ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \cdot \ln x$$

$$2 \quad \frac{y'}{y} = (\cos x \cdot \ln x)' = (\cos x)' \cdot \ln x + \cos x \cdot (\ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$3 \quad y' = y \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{x \sin x \cdot \ln x}{x} \right)$$

$$y' = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x - x \sin x \cdot \ln x}{x} \right)$$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $y = 4x^5 - \sin 2x + 5^x$	2 $y = 5x^6 - \cos 3x + 4^x$	3 $y = 7x^3 - \operatorname{tg} 2x + 3^x$
4 $y = 2x^7 + \log_2 4x + \arccos x$	5 $y = 2x^4 - \ln 3x + \operatorname{arctg} x$	6 $y = 2x^4 - \log_5 2x + \arcsin x$
7 $y = 5x^3 - \cos 5x + 2^x$	8 $y = 2x^4 - \frac{1}{x} + \arcsin x$	9 $y = 9x^5 - \log_5 7x + \sin 4x$
10 $y = 6x^4 - \ln 4x + \operatorname{ctg} x$	11 $y = 3x^6 - \arccos 4x - \sqrt{2x}$	12 $y = 2x^5 - \operatorname{ctg} 5x + 2^x$
13 $y = 4x^5 - \arcsin 2x + 2^x$	14 $y = 5x^2 - \cos 4x + 5^x$	15 $y = 2x^6 - \cos 4x + \sqrt{4x}$
16 $y = 2x^3 + \log_3 2x + \cos x$	17 $y = 4x^2 - \ln 3x + \operatorname{arctg} x$	18 $y = 2x^2 - \lg 2x + \sin x$
19 $y = 9x^3 - \sqrt{7x} + \sin 4x$	20 $y = \sin 2x + 4x^5 - 4^x$	21 $y = 2x^5 - \operatorname{tg} 4x + \sqrt{x}$
22 $y = 12x^2 - \operatorname{ctg} 2x + 4^x$	23 $y = 7x^3 - \log_5 x + \sin 3x$	24 $y = 4x^2 - \lg x + \sqrt{3x}$
25 $y = 5x^3 - \ln 4x + \sqrt{2x}$	26 $y = \sqrt{2x} - \operatorname{ctg} 5x + 3^x$	27 $y = 3x^2 - \cos 3x - \sqrt{4x}$
28 $y = 2x^3 - \frac{1}{x} + \sin 3x$	29 $y = 2x^4 - \frac{1}{x} + \sqrt{4x}$	30 $y = 2x^5 - \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$

Задание 2

1 $y = (5x^3 - x) \ln 4x$	2 $y = (1 + \operatorname{tg} 2x) \cdot 4^x$	3 $y = (3x^2 - 5x - 8) \sqrt{4x}$
4 $y = \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \operatorname{arctg} x$	5 $y = (\sin 2x + 2 \cos x) 4^x$	6 $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \ln x$
7 $y = (2x^5 - 3x - 1) \operatorname{ctg} 5x$	8 $y = (3x^2 + 5x - 1) \sqrt{2x}$	9 $y = (2x^4 + x^2 - 1) \frac{1}{x}$
10 $y = \operatorname{ctg} 5x \cdot (2^x + 3^x)$	11 $y = \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \operatorname{arctg} x$	12 $y = (4x^2 - 3x) \ln 3x$

13 $y = (2x^3 + 7x^2 + 5)\ln 3x$	14 $y = \sin 2x(4x^5 - x^3 + x)$	15 $y = (2x^2 + 3x - 8)\sqrt{x}$
16 $y = \operatorname{tg} 2x(4x^4 - x^3 + 3x)$	17 $y = (7x^3 + 3x - 4)\log_5 x$	18 $y = (2x^5 - 5x^2 + x)\frac{1}{x}$
19 $y = \left(2x^5 - \frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x$	20 $y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{arctg} x$	21 $y = (3^x - 2^x)\sqrt{2x}$
22 $y = (5x^2 + 3x)\ln x$	23 $y = \operatorname{tg} 2x \cdot (x^3 - 4x^2 + x)$	24 $y = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{tg} x$
25 $y = (x^2 + 5x - 1)\sqrt{x}$	26 $y = (3x^2 + 5x - 1)\sqrt{x}$	27 $y = (2x^3 - 3x^2 + 1)\ln 3x$
28 $y = (3x^3 - 2x)\ln x$	29 $y = \operatorname{tg} 2x \cdot (2^x + 5^x)$	30 $y = \operatorname{tg} 3x(3x^4 - 2x^3)$

Задание 3

1 $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	2 $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$	3 $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
4 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$	5 $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$	6 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
7 $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$	8 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$	9 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$
10 $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}$	11 $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 7x + 5}$	12 $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$
13 $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 1}$	14 $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$	15 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
16 $f(x) = \frac{x - 2}{x^3 - 8}$	17 $f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 6}{x - 3}$	18 $f(x) = \frac{\cos 3x}{2x}$
19 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$	20 $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7}$	21 $f(x) = \frac{x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$
22 $f(x) = \frac{4x^2 + 7x - 2}{x + 2}$	23 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	24 $f(x) = \frac{x - 4}{3x^2 - 11x - 4}$
25 $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$	26 $f(x) = \frac{x + 3}{5x^2 + 14x - 3}$	27 $f(x) = \frac{x + 4}{x^3 + 64}$
28 $f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}$	29 $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$	30 $f(x) = \frac{x + 6}{2x^2 + 9x - 18}$

Задание 4

1 $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x + 4}}$	2 $y = \sqrt{(1 + \operatorname{tg} 2x) \cdot 4^x}$	3 $y = \sqrt{(2x^3 + 7x^2 + 5) \ln 3x}$
4 $y = \sqrt{2x^2 \cdot \lg 2x}$	5 $y = \sqrt{\frac{3^x + x}{x^3 + 64}}$	6 $y = \ln \left(\frac{x^2 - 3x}{x + 1} \right)$
7 $y = \left(\frac{3x^2 - 11x + 6}{x - 3} \right)^4$	8 $y = \left(\frac{\cos 3x}{2x} \right)^3$	9 $y = \sqrt{\frac{3x + 5}{2x^2 + 9x - 18}}$
10 $y = \sqrt{\frac{2^x + 5x}{2x^3 + 1}}$	11 $y = \sqrt{(5x^3 - x) \ln 4x}$	12 $y = \sqrt{(1 + \operatorname{ctg} 2x) \cdot 2^x}$
13 $y = \sqrt{\frac{\sin 5x}{3x^2}}$	14 $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 2x}{4x + 1}}$	15 $y = \ln \left(\frac{x^2 - 4x}{x + 1} \right)$
16 $y = \ln \left(\frac{3x^2 - 2x}{4x + 1} \right)$	17 $y = \ln \left((2x^2 + 3x) \sqrt{x} \right)$	18 $y = \sqrt{\frac{\cos 3x}{2x}}$
19 $y = \sqrt{(2x^2 + 3x) \operatorname{arctg} x}$	20 $y = \sqrt{\frac{2^x + 3x}{5x^2 + 14x - 3}}$	21 $y = \left(\frac{\ln 3x}{2x} \right)^3$
22 $y = \sqrt{\frac{\sin 2x}{5x}}$	23 $y = \sin \left(\frac{x^2 - 3x}{x + 1} \right)$	24 $y = \sqrt{(2x^5 + 7x + 5) \ln 2x}$
25 $y = \left(\frac{\cos 3x + x}{4x} \right)^3$	26 $y = (2x^2 \cdot \lg 2x)^3$	27 $y = \ln \left(\frac{2^x + 3x}{5x^2 + 14x - 3} \right)$
28 $y = \cos \left((5x^3 - x) \ln 4x \right)$	29 $y = \sqrt{\frac{\ln 4x}{3x}}$	30 $y = \sqrt{\frac{\cos 3x + x}{4x}}$

Задание 5

1 $y = \sin^3 \sqrt{2x}$	2 $y = \ln^4 \cos 5x$	3 $y = \ln^4 (5x^3 - 2x + 6)$
4 $y = \operatorname{tg}^4 3x$	5 $y = \sqrt{4 \sin x^2}$	6 $y = \operatorname{ctg}^4 2x$
7 $y = \sqrt{\ln \cos 5x}$	8 $y = \ln^2 \sin 2x$	9 $y = \sqrt{\operatorname{ctg} (x^2 - 3x + 11)}$
10 $y = \ln^3 \sin 2x$	11 $y = \sqrt{\ln (5x^3 - 2x + 6)}$	12 $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$
13 $y = \sqrt{\operatorname{ctg} (3x^2 + 2x + 14)}$	14 $y = \operatorname{tg}^3 (2x^2 + x + 11)$	15 $y = \ln^2 \sin 3x$
16 $y = \ln \sqrt{\cos 3x}$	17 $y = \sqrt{\ln \sin 2x}$	18 $y = \sqrt{\ln \cos 5x}$
19 $y = \operatorname{ctg}^3 (x^2 - 3x + 11)$	20 $y = \ln^3 \sin 4x$	21 $y = \ln \operatorname{tg}^2 3x$

22 $y = \ln \operatorname{ctg}^2 3x$	23 $y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$	24 $y = \ln^3(3x^2 + 2x + 14)$
25 $y = \sqrt{\ln(3x^2 + 2x + 14)}$	26 $y = \ln \sqrt{\sin 3x}$	27 $y = \sqrt{\operatorname{tg}(2x^2 + x + 11)}$
28 $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^5 2x}$	29 $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$	30 $y = \sqrt{2\operatorname{ctg}^3 x}$

Задание 6

1 $y = (x^2 + \sqrt{x})^{\cos x}$	2 $y = (\sin \sqrt{x})^{\ln 5x}$	3 $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\ln 4x}$
4 $y = (\sqrt{4x^2 - 4x})^{\ln 2x}$	5 $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$	6 $y = (5x^3 - 2x + 6)^{\ln 3x}$
7 $y = (\cos 5x)^{3x^2 - 4x + 1}$	8 $y = (3x^4 - 4x + 5)^{\sin 2x}$	9 $y = (x^2 - 3x + 11)^{\operatorname{ctg} 2x}$
10 $y = (\sin 3x)^{\ln 2x}$	11 $y = (5x^3 - 2x + 6)^{\ln x^2}$	12 $y = (4x^3 - 3x)^{\operatorname{tg} 3x}$
13 $y = (2x^2 + x + 11)^{\ln(x^2 - x)}$	14 $y = (3x^2 + 2x + 14)^{\sin 3x}$	15 $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2 - 5x}}$
16 $y = (x^2 - 3x + 11)^{\sin 3x}$	17 $y = (\sin 4x)^{\ln^3 x}$	18 $y = (x^2 - \cos 5x)^{3x^2 - 4x + 1}$
19 $y = (\sin \sqrt{x})^{\cos 5x}$	20 $y = (\sin 2x)^{\sqrt{\ln x}}$	21 $y = (2x^4 - 3x + 4)^{\sin 4x}$
22 $y = (4x^3 - 6x)^{\operatorname{ctg} 3x}$	23 $(x^2 - 10)^{\operatorname{tg}(2x^2 + x + 11)}$	24 $y = (3x^2 + 2x + 14)^{\ln^2 x}$
25 $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^{\sin(x^2 - 2x)}$	26 $y = (4x^3 - 3x + 1)^{\ln 4x}$	27 $y = (4x^2 - 4x)^{\ln 3x}$
28 $y = (x^3 - 3x + 6)^{\ln x^2}$	29 $y = (x^2 + 7x - 6)^{\ln(x^3 - 3x)}$	30 $y = (3x^2 - 4x + 17)^{\sin 2x}$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Что называется производной функции?
- 2 Сформулируйте правила дифференцирования.
- 3 Что такое сложная функция?
- 4 Как найти производную сложной функции?

5 В каких случаях используется метод логарифмического дифференцирования?

6 В чем суть метода логарифмического дифференцирования?

Литература:

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012
- 4 <http://ru.wikipedia.org>
- 5 <http://www.mathprofi.ru>
- 6 <http://www.cleverstudents.ru>
- 7 <http://www.webmath.ru/poleznoe>
- 8 <http://www.cleverstudents.ru>
- 9 <http://www.math24.ru/logarithmic-differentiation.html>
- 10 <http://www.allmath.ru/highermath/mathanalysis/limits/limits1.htm>