

Практическая работа 4

Операции над множествами. Решение задач на множествах

Цель работы: изучить операции над множествами.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Множество - это совокупность, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким-либо общим свойством. Объекты, входящие в эту совокупность, называются элементами множества.

2 Существует два основных способа задания неупорядоченных множеств:

- а) перечисление всех его элементов;
- б) описание характеристического (общего) свойства его элементов

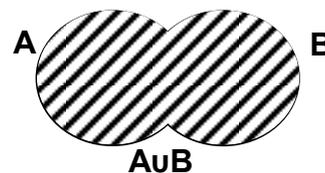
3 Множество, не содержащее элементов, называют пустым и обозначают \emptyset .

4 Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B , то A называют подмножеством множества B . Обозначения: $A \subseteq B$ (A принадлежит B , A включено в B , A содержится в B и т.д.), $B \supseteq A$ (B включает A , B содержит A и т.д.).

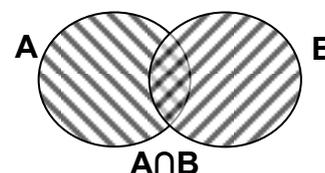
5 Если $A \subseteq B$ и существует хотя бы один элемент множества B , не принадлежащий множеству A , то A – собственная часть B , т.е. A строго включается в B . Обозначение: $A \subset B$.

6 Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Обозначение: $A = B$.

7 Объединением (суммой) множеств A и B называется множество, обозначаемое через $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A или B . Краткая запись: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Соответствующая диаграмма Эйлера – Венна:

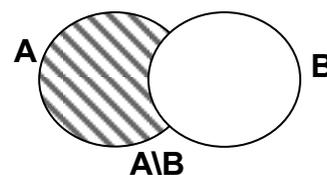


8 Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество, обозначаемое через $A \cap B$ и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B . Краткая

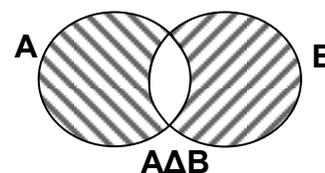


запись: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Соответствующая диаграмма Эйлера-Венна:

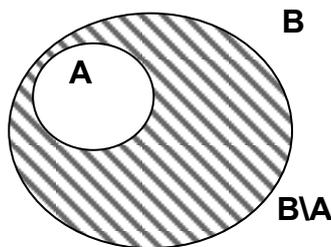
9 Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое через $A \setminus B$ и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B . Краткая запись: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Соответствующая диаграмма Эйлера-Венна



10 Симметрической разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \Delta B$ и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат $A \setminus B$ или $B \setminus A$. Краткая запись: $A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \text{ или } x \in B \setminus A\}$. Соответствующая диаграмма Эйлера-Венна:



11 Если множество $A \subseteq B$, то разность $B \setminus A$ называется дополнением множества A до множества B . Соответствующая диаграмма Эйлера-Венна:



12 Если I – универсальное множество и $A \subseteq I$, то разность $I \setminus A$ называется дополнением множества A до множества I и обозначается \overline{A} . Краткая запись: $\overline{A} = \{x \mid x \in I \text{ и } x \notin A\}$.

13 Множество всех подмножеств множества A называется булеаном и обозначается 2^A : $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$.

14 Мощностью конечного множества A называют число его элементов и обозначают $|A|$. Если $|A| = n$, то $|2^A| = 2^n$

15 Свойства операций над множествами:

Для любых $A, B, C \subseteq U$ справедливы соотношения:

- идемпотентность: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
- коммутативность: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
- ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- законы поглощения: $(A \cup B) \cap A = A$; $(A \cap B) \cup A = A$;

- свойства нуля: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = I$;
- свойства единицы: $A \cup I = I$; $A \cap I = A$; $I = \emptyset$;
- двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$;
- законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- свойства дополнения: $A \cup \overline{A} = I$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

16 Декартовым (прямым) произведением множеств A_1, \dots, A_n называется множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) | a_1 \in A_1; \dots; a_n \in A_n\}$

17 Мощность декартова произведения находится по формуле:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

Задания

1 Даны множества A, B, C, D . Найдите множества X и Y . Составьте диаграммы Венна

2 Проверить с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3 Дано универсальное множество $I = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, числовой промежуток X и уравнение. Найти:

а) множество целых чисел A , принадлежащих промежутку X , множество корней заданного уравнения B и декартово произведение $A \times B$;

б) множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \Delta B$; \overline{A} ; \overline{B} ;

в) множество всех подмножеств 2^A и его мощность

Примеры выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

$$A = \{a, e, f, j, k\}, \quad B = \{f, i, j, l, y\}, \quad C = \{j, k, l, y\}, \quad D = \{i, j, s, t, u, y, z\}.$$

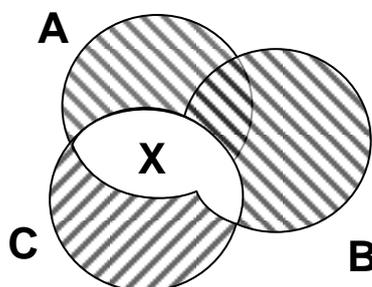
$$X = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{и} \quad Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$$

Решение:

1 Определим элементы множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Для этого найдем сначала пересечение множеств $(A \cap C)$. Элементы j и k одновременно принадлежат множеству A и C , следовательно, $(A \cap C) = \{j, k\}$. Аналогично, $(B \cap C) = \{j, l, y\}$. Таким образом, объединение $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{j, k, l, y\}$.

Для построения диаграммы Венна рассмотрим, как связаны между собой множества А, В и С; в примере все три множества пересекаются между собой:

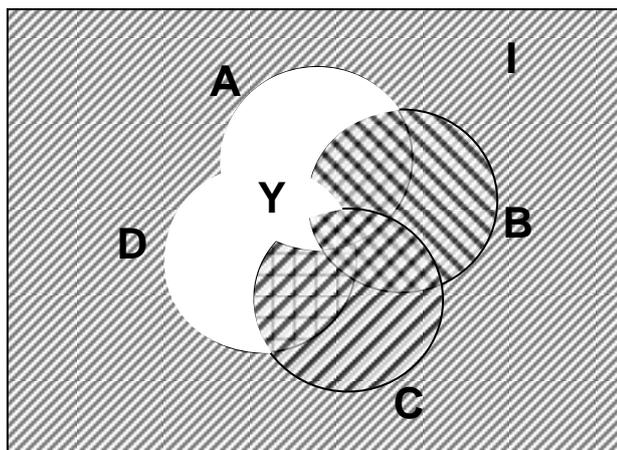
$$(A \cap B) = \{f; j\}; (A \cap C) = \{j; k\}; (B \cap C) = \{j; l; y\}; (A \cap B \cap C) = \{j\}$$



2 Определим элементы множества $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$. Найдем дополнение В. Универсальное множество по условию задания состоит из 26 букв $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$. Если отсюда исключить 5 элементов множества В, то получим множество \bar{B} из 21 элемента $\{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, z\}$. Пересечение множеств $(A \cap \bar{B})$ состоит из элементов $\{a, e, k\}$, т.е. всех элементов множества А, которые не принадлежат В. Для нахождения разности множеств $D \setminus C$ вычеркнем из множества $D = \{i, j, s, t, u, y, z\}$ элементы $\{j, y\}$, принадлежащие $C = \{j, k, l, y\}$. Получим $D \setminus C = \{i, s, t, u, z\}$. В итоге $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C) = \{a, e, i, k, s, t, u, z\}$

Строим диаграмму Венна:

$$(A \cap B) = \{f; j\}; (A \cap C) = \{j; k\}; (A \cap D) = \{j\}; (B \cap C) = \{j; l; y\}; (B \cap D) = \{i; j; y\}; (C \cap D) = \{j; y\}; (A \cap B \cap C \cap D) = \{j\}$$



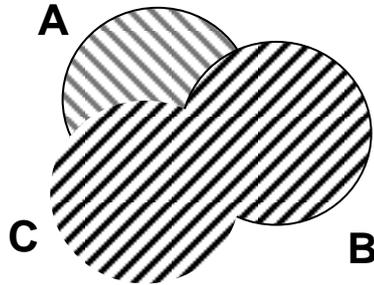
Задание 2

Исходные данные:

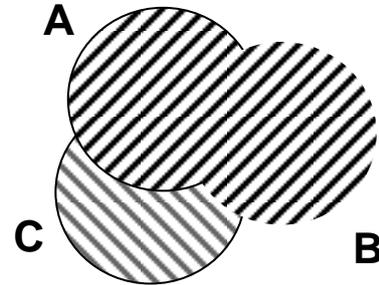
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Решение:

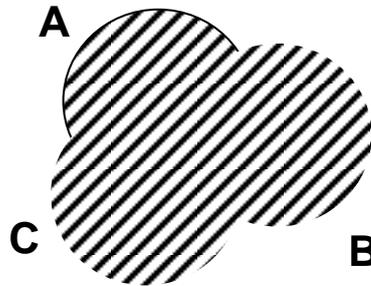
1 Построим диаграмму для левой части равенства:



2 Построим диаграмму для правой части равенства:



3 Получили одну и ту же область:



Задание 3

Исходные данные:

$$X = (-3; 0]; (x+2)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Решение:

а) Решим уравнение: $x_1 = -2$;

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm 4}{2}; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -1$$

$$A = \{-2; -1; 0\}; \quad B = \{-2; -1; 3\};$$

$$A \times B = \{(-2; -2); (-2; -1); (-2; 3); (-1; -2); (-1; -1); (-1; 3); (0; -2); (0; -1); (0; 3)\}$$

$$\text{б) } A \cup B = \{-2; -1; 0; 3\}; \quad A \cap B = \{-2; -1\}; \quad A \setminus B = \{0\}; \quad B \setminus A = \{3\};$$

$$A \Delta B = \{0; 3\}; \quad \bar{A} = \{-3; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \quad \bar{B} = \{-3; 0; 1; 2; 4; 5; 6\}$$

$$B) 2^A = \{\{\emptyset\}; \{-2\}; \{-1\}; \{0\}; \{-2; -1\}; \{-2; 0\}; \{-1; 0\}; \{-2; -1; 0\}\};$$

$$|2^A| = 8$$

Задания к практической работе.

Задание 1

1	$A = \{b, e, f, k, t\}; B = \{f, i, j, p, y\};$ $C = \{j, k, l, y\}; D = \{i, j, s, t, u, y, z\};$ $X = (A \cap C) \cup (B \cap C);$ $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	2	$A = \{b, c, h, l, j\}; B = \{e, h, l, s, w\};$ $C = \{a, b, j, k, l, m\};$ $D = \{a, h, l, w, x\};$ $X = (A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
3	$A = \{a, h, m, o, r\}; B = \{j, k, o, u, y\};$ $C = \{g, h, j\}; D = \{g, j, q\};$ $X = (A \cap C) \cup (D \cap B);$ $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	4	$A = \{a, b, h, j, l\};$ $B = \{b, c, h, l, r, v\};$ $C = \{j, k, n, t, z\}; D = \{b, i, k, v, w\};$ $X = (A \cup B) \cap C;$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$
5	$A = \{c, e, h, n\}; B = \{e, f, k, n, x\};$ $C = \{b, c, h, p, r, s\}; D = \{b, e, g\};$ $X = (A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	6	$A = \{a, d, k, l, o, s\};$ $B = \{d, e, k, s, u, x\};$ $C = \{o, p, w\}; D = \{d, n, r, y, z\};$ $X = (A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$
7	$A = \{b, f, g, m, o\}; B = \{b, g, h, l, u\};$ $C = \{e, f, m\}; D = \{e, g, l, p, q, u, v\};$ $X = (A \cap C) \cup B;$ $Y = (A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	8	$A = \{a, f, l, n, o\}; B = \{f, g, o, p, z\};$ $C = \{i, j, u, w\};$ $D = \{f, h, n, t, u, y, z\};$ $X = (A \cap B) \cup C;$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$
9	$A = \{a, e, f, i\}; B = \{a, b, k, n\};$ $C = \{e, f, n, o, w, x\};$ $D = \{a, d, e, o, p, t, u\};$ $X = (A \cup B) \cap D;$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	10	$A = \{a, b, h, k, o, r\};$ $B = \{b, g, h, l, s\};$ $C = \{k, l, z\}; D = \{g, j, p, q, u, v\};$ $X = (A \cap C) \cup B;$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$
11	$A = \{a, h, k\}; B = \{c, d, h, p, r\};$ $C = \{h, i, s\}; D = \{c, g, j, v, w\};$ $X = (A \cup B) \cap C;$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	12	$A = \{b, k, n, o, q\}; B = \{a, b, k, u\};$ $C = \{o, p\}; D = \{a, m, n, y, z\};$ $X = (A \cup B) \cap D;$ $Y = (\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$
13	$A = \{a, b, g, k, m, p\};$ $B = \{b, e, f, l, r\};$ $C = \{k, l, w, x\};$ $D = \{e, j, o, p, q, u, v\};$ $X = (A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y = (\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	14	$A = \{b, e, g, h, k, s\};$ $B = \{c, g, p, q\};$ $C = \{f, g, s, x, y, z\};$ $D = \{a, c, d, g, u, v, z\};$ $X = (A \cup B) \cap C;$ $Y = (\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$

15	$A=\{c, m, n, o, q\}; B=\{c, d, m, w\};$ $C=\{m, n, q\}; D=\{c, m, p\};$ $X=(A \cup B) \cap C; Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	16	$A=\{b, d, f, g, l, u\};$ $B=\{d, e, f, m, n, z\};$ $C=\{h, i, r, x, y\};$ $D=\{a, e, f, k, r, s, x\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$
17	$A=\{b, d, l, p\}; B=\{b, d, e, l, p, x\}$ $C=\{k, l, p, t\};$ $D=\{d, k, o, p, q, u, v\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	18	$A=\{b, c, g, l, w\};$ $B=\{e, g, h, q, w\};$ $C=\{c, d, k, l, y\};$ $D=\{a, g, h, u, v, z\};$ $X=(A \cap C) \cup B;$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$
19	$A=\{a, b, f, g, i\}; B=\{c, f, g, i, s, v\};$ $C=\{a, g, h, i\}; D=\{f, w, x\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	20	$A=\{c, g, h, k, y\};$ $B=\{a, b, k, n, u\};$ $C=\{i, j, o, y, z\};$ $D=\{a, b, f, g, y, z\};$ $X=(A \cup B) \cap D;$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (\bar{C} \setminus \bar{B})$
21	$A=\{c, g, h, i, j\}; B=\{c, d, i, o, s\};$ $C=\{i, j, r, z\}; D=\{b, c, f, i, w, x\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(A \setminus D) \cup (\bar{C} \setminus \bar{B})$	22	$A=\{b, d, j, n, t, v\};$ $B=\{f, g, j, r, t, x\};$ $C=\{o, p, x\}; D=\{a, f, m, s, x, y\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$
23	$A=\{c, f, g, k\}; B=\{e, f, g, m, q\};$ $C=\{h, i, r, w, x\};$ $D=\{b, e, j, u, v, z\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y=(A \setminus D) \cup (\bar{C} \setminus \bar{B})$	24	$A=\{a, b, d, l, x\};$ $B=\{d, e, h, i, n, u\};$ $C=\{e, f, m, n\};$ $D=\{a, c, h, k, r, s, w, x\};$ $X=(A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$
25	$A=\{a, e, g, o, p\}; B=\{e, h, i, o, u\};$ $C=\{g, h, p, s, t, w\};$ $D=\{f, h, n, s, t, x, y\};$ $X=(A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y=(\bar{A} \cap \bar{B}) \setminus (C \cup D)$	26	$A=\{c, d, k, l, m, z\};$ $B=\{b, c, d, n, w\}; C=\{m, n, y\};$ $D=\{b, j, l, r, s, w, x\};$ $X=(A \cup D) \cap C;$ $Y=(A \setminus D) \cup (\bar{C} \setminus \bar{B})$
27	$A=\{a, b, c, d, e, r\};$ $B=\{b, c, d, f, n, y\};$ $C=\{b, c, h, k, l, s\};$ $D=\{a, b, r, s, w, x\};$ $X=(A \cup D) \cap C;$ $Y=(\bar{A} \cap D) \cup (C \setminus B)$	28	$A=\{c, f, h, l, o\}; B=\{d, e, f, p, w\};$ $C=\{j, k\};$ $D=\{b, d, g, k, t, u, y, z\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(A \setminus D) \cup (\bar{C} \setminus \bar{B})$

29	$A=\{a, b, c, e, t\};$ $B=\{b, c, d, e, m, u\};$ $C=\{b, c, f, g, h, u\};$ $D=\{a, d, q, r, v, w\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(\overline{A \cap D}) \cup (C \setminus B)$	30	$A=\{b, c, h, o\};$ $B=\{d, f, g, o, v, y\};$ $C=\{d, e, j, k\}; D=\{a, b, f, g\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(A \setminus D) \cup (\overline{C \setminus B})$
----	---	----	--

Задание 3

№	X	уравнение	№	X	уравнение
1	$[-3; 0)$	$(x+1)(x^2-4x)=0;$	2	$[-2; 0)$	$(x^2+x)(x-5)=0;$
3	$(-2; 1]$	$(x-1)^2(x^2-3x)=0;$	4	$[-2; 0)$	$(x+2)(x^2-4x+3)=0;$
5	$(-1; 2]$	$x^3(x^2-8x+12)=0;$	6	$(0; 3]$	$(x-2)(x^2-1)=0$
7	$[0; 2]$	$x(x^2+2x-3)=0$	8	$(1; 4]$	$(x^2-x)(x-2)=0$
9	$[1; 3]$	$(x-2)(x^2-9x+18)=0$	10	$[2; 4]$	$(x^2-4)(x-4)=0$
11	$(2; 5]$	$(x+2)(x^2-9x+20)=0$	12	$[0; 2)$	$(x+1)(x^2-x)=0$
13	$(3; 6]$	$(x+1)(x^2-11x+30)=0$	14	$(-1; 3)$	$(x-1)(x^2-3x)=0$
15	$[3; 5]$	$(x^2-9)(x-5)=0$	16	$[1; 4)$	$x(x^2-4x+3)=0$
17	$[4; 6]$	$(x^2-1)(x-5)=0$	18	$(0; 4)$	$(x-2)(x^2-9x+18)=0$
19	$[3; 6)$	$(x^2-4)(x-4)=0$	20	$(1; 5)$	$(x^2-9)(x-4)=0$
21	$(-3; 0]$	$(x+2)(x^2-4x)=0$	22	$[2; 5)$	$(x^2-4)(x-3)=0$
23	$(-2; 1]$	$(x-2)(x^2-x)=0$	24	$[3; 6)$	$(x-5)(x^2-x)=0$
25	$[-2; 1)$	$x(x^2-8x+12)=0$	26	$(2; 6)$	$(x+1)(x^2-9x+20)=0$
27	$(-1; 2]$	$(x-2)(x^2-1)=0$	28	$(3; 6)$	$(x-4)(x^2-11x+30)=0$
29	$[-1; 2)$	$(x^2-x)(x-3)=0$	30	$(3; 6]$	$(x-2)(x^2-16)=0$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные понятия, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что такое множество?

- 2 Что такое элемент множества?
- 3 Способы задания множества
- 4 Что такое подмножество?
- 5 Какие множества называются равными?
- 6 Что такое пересечение множеств?
- 7 Что называется объединением множеств?
- 8 Что называется разностью множеств?
- 9 Что называется симметрической разностью множеств?
- 10 Что называется дополнением?
- 11 Что такое пустое множество?
- 12 Что называется дополнением множества?
- 13 Что такое булеан?
- 14 Мощность множества
- 15 Свойства операций над множествами
- 16 Декартово произведение множеств
- 17 Мощность декартова произведения

Литература:

- 1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова . - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.
- 2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.
- 3 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.
- 4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.
- 5 <http://visit-smolensk.ru/>
- 6 <http://dm-learning.livejournal.com>
- 7 <http://www.poezija1.narod.ru>
- 8 <http://www.algebraic.ru>
- 9 <http://www.math4you.ru/theory/main-concept/set>