Практическая работа 11

Полное исследование функции и построение графика

Цель: закрепить навыки исследования функций и построения графиков

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Областью определения функции $y = f(x)$ (выражения $f(x)$) называют множество всех значений x, для которых функция (выражение) имеет смысл. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается как $D(y)$ или $D(f(x))$.

2 На наличие ограничений области определения указывает:

– присутствие корней четной степени вида $\sqrt[n]{f(x)}$, где n - четное, например, $\sqrt{x+1}$ (наличие степенной функции с дробным показателем, знаменатель которого есть четное число, например, $(x^2+x-6)^{\frac{5}{4}}$);

– присутствие функции логарифма вида $\log_a(f(x))$, например, $\ln(x^3+1)$ или $\log_x(x^2-3)$;

– присутствие дробей вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, например, $x+\frac{2x}{x^4-1}$;

– присутствие функций тангенса вида $tg(f(x))$ и котангенса вида $ctg(f(x))$, например, $x^2+tg(2x)$ или $ctg(3x^3-1)$;

– присутствие функций арксинуса вида $\arcsin(f(x))$ и арккосинуса вида $\arccos(f(x))$, например, $\arcsin(x+2)$ или $\arccos(x^2)$;

– присутствие показательно степенных функций вида $(f(x))^{g(x)}$, например, $x^{\cos(x+3)}$;

– присутствие любых комбинаций всех вышеперечисленных случаев

3 Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество всех значений функции, которые она принимает при переборе всех x из области определения $x \in D(f)$. Область значений функции обозначают как $E(f)$.

4 Функция $y=f(x)$ называется четной, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

а) область определения данной функции должна быть симметрична относительно точки О. То есть если некоторая точка a принадлежит области определения функции, то соответствующая точка -а тоже должна принадлежать области определения заданной функции;

б) значение функции в точке x, принадлежащей области определения функции должно равняться значению функции в точке –x, то есть для любой точки x, из области определения функции должно выполняться следующее равенство $f(x) = f(-x)$

5 Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

а) область определения данной функции должна быть симметрична относительно точки O. То есть если некоторая точка a принадлежит области определения функции, то соответствующая точка -а тоже должна принадлежать области определения заданной функции;

б) для любой точки x, из области определения функции должно выполняться следующее равенство $f(x) = -f(x)$

6 График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно точки O – начала координат.

7 Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y= f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

8 Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

9 Прямая $y = y_0$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0.

10 График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

11 Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-kx-b|=0$

12 Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-kx|=b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x\to\infty$.

13 Если производная функции положительна на некотором промежутке, то на этом промежутке функция возрастает, если на некотором промежутке производная функции отрицательна, то функция то на этом промежутке убывает.

14 Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$.

15 Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$.

16 Точки максимума и минимума называются точками экстремума функции.

17 Необходимое условие экстремума: если x_0 точка экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует.

18 Достаточное условие экстремума: если при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная не изменяет знак, то экстремума в этой точке нет, если производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 - точка минимума, если с «плюса» на «минус», то x_0 - точка максимума.

19 Точка x_0 называется точкой перегиба графика функции, если функция в этой точке определена, и по разные стороны от этой точки имеет разные направления выпуклости.

20 Если вторая производная функции положительна, то функция выпукла вверх, если вторая производная отрицательна, то функция выпукла вниз.

21 Необходимое условие точки перегиба графика функции: вторая производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

22 Достаточное условие точки перегиба графика функции: при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак.

Задания

1 Найти область определения и область значения функции

2 Выяснить симметрию графика функции (чётность, нечётность, периодичность)

3 Выяснить периодичность функции

4 Найти точки пересечения графика функции с осями координат, полагая вначале $\boldsymbol{x} = 0$, а затем решая уравнение $\boldsymbol{y} = 0$

5 Найти точки разрыва, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты

6 Найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции

7 Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба

8 Построить дополнительные точки и график функции по результатам исследования

Пример выполнения:

Исходные данные:

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ и построить график.

Решение:

1 Функция не существует, если знаменатель равен нулю, значит $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

D(f)=($-\infty$*; – 1)* $\cup$ *(– 1; +*∞*)*

2 $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x+1}=\dfrac{x^2}{-x+1} \neq y(x)$ Функция не является чётной.

$y(-x)=\dfrac{x^2}{-x+1}=-\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) \neq -y(x)$ Функция не является нечётной.

3 Функция не периодическая.

4 График функции пересекает оси координат в единственной точке (0; 0), т.к. *y (0) = 0*

5 а) Находим наклонные асимптоты $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{1+\frac{1}{x}}=-1$.

При $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y=x-1$.

б) При $x \to -1-0$ $y \to -\infty$; при $x \to -1+0$ $y \to +\infty$. Следовательно, прямая $x=-1-$ вертикальная асимптота.

в) Для нахождения горизонтальной асимптоты найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}=\pm\infty$ Следовательно, горизонтальная асимптота отсутствует.

6 Находим интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции, используя первую производную: $y'=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $y'=0$ при $x_1=-2,\ x_2=0$;

y' не существует при $\boldsymbol{x=-1}$, но точка $\boldsymbol{x=-1}$ не принадлежит области определения, поэтому и не является критической для данной функции.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	-	не сущ	-	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	не сущ	$\searrow$	min	$\nearrow$

7 $y_{\max}=y(-2)=-4;\quad y_{\min}=y(0)=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad E(f) = (-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$$

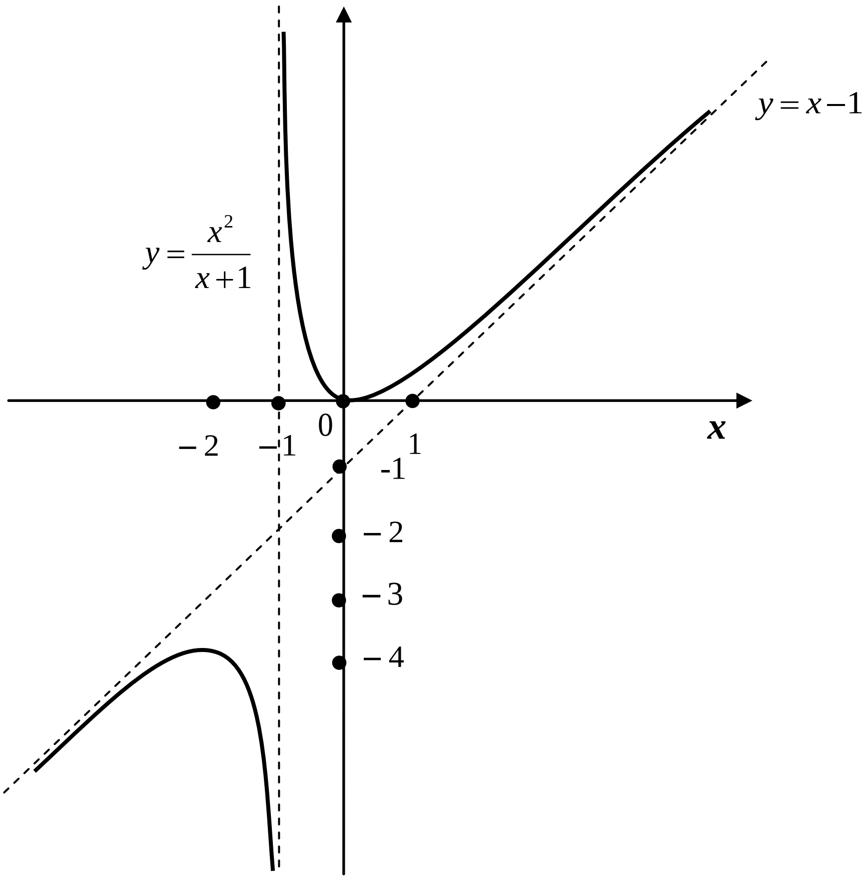
8 Находим интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба, используя вторую производную:

$$y''=\frac{2}{(x+1)^3},\quad y''\neq 0;$$

y'' не существует при $x=-1$, но точка $x=-1$ не принадлежит области определения. Следовательно, точек перегиба нет. При $-\infty<x<-1$ $y''<0$ и график функции выпуклый, а при $-1<x<+\infty$ $y''>0$ график функции вогнутый.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y''	-	не сущ	+
y	$\cap$	не сущ	$\cup$

9 Используя результаты исследования, строим график.



Задания к практической работе.

1 $y=\frac{x^2+3x-4}{x+1}$	2 $y=\frac{3x-1}{x}$	3 $y=\frac{3}{x^2-4}$

4 $y=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$	5 $y=x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$	6 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$
7 $y=\dfrac{x}{x+2}$	8 $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$	9 $y=\dfrac{x^2+x-6}{x-1}$
10 $y=\dfrac{x^3}{2(x+5)^2}$	11 $y=\dfrac{2x-3}{x}$	12 $y=\dfrac{x^2-1}{x}$
13 $y=\dfrac{x^3+8}{x^2}$	14 $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$	15 $y=\dfrac{x}{x-5}$
16 $y=\dfrac{5}{x^2-1}$	17 $y=x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}$	18 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$
19 $y=3\sqrt[3]{x}-x$	20 $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$	21 $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x-2}$
22 $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$	23 $y=\dfrac{x^3+8}{x^2-1}$	24 $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$
25 $y=\dfrac{x}{x+3}$	26 $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+2}$	27 $y=\dfrac{x^3+27}{x^2}$
28 $y=\dfrac{x^3+8}{x^2-9}$	29 $y=\dfrac{x^3-27}{x^2}$	30 $y=\dfrac{x^2-7x+12}{x-1}$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что такое и как обозначается область определения функции?

2 Ограничения области определения функции

3 Что такое и как обозначается область значений функции?

4 При каких условиях функция является четной?

5 При каких условиях функция является нечетной?

6 Графики четных и нечетных функций

7 Что такое вертикальная асимптота?

8 При каких значениях аргумента существует вертикальная асимптота?

9 Что такое горизонтальная асимптота?

10 Что такое наклонная асимптота?

11 Условие существования наклонной асимптоты

12 Условия возрастания и убывания функции

13 Что такое максимум функции?

14 Что такое минимум функции?

15 Что такое экстремум функции?

16 Необходимое условие существования экстремума функции

17 Достаточное условие существования экстремума функции

18 Что такое точка перегиба графика функции?

19 Необходимое условие точки перегиба графика функции

20 Достаточное условие точки перегиба графика функции

21 Условия выпуклости графика функции

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012

4 http://ru.wikipedia.org

5 http://www.nado5.ru/e-book/chetnye-i-nechetnye-funkcii

6 http://www.cleverstudents.ru

7 http://www.webmath.ru/poleznoe

8 http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/150204

9 http://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl

10 http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/limits/limits1.htm