Практическая работа 12

Нахождение частных производных и полного дифференциала функции.

Цель работы: закрепить умения находить частные производные первого и второго порядка и полный дифференциал функции.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Функция двух переменных обычно записывается как z = f (x, y), при этом переменные x, y называются независимыми переменными или аргументами. Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных. Иногда используют запись $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

2 Частной производной функции z = f (x, y) по переменной x в точке (x_0, y_0) называют предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, если он существует. Частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано.

3 Частную производную по x обозначают одним из следующих символов: $z'_x(x_0, y_0)$; $f'_x(x_0, y_0)$; $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Аналогично определяется частная производная по y и вводятся ее обозначения.

4 Полный дифференциал функции f (x, y, z,...) нескольких независимых переменных — выражение $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots$

5 Частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной, когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).

6 Частной производной второго порядка от функции $z = f(x;y)$, дифференцируемой в области D, называется первая производная от соответствующей частной производной. Производные f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} и f''_{yy} называются частными производными второго порядка. Рассматривая частные производные от них,

получим всевозможные частные производные 3 порядка: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ и т. д.

7 Теорема о смешанных частных производных: Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ функция $z = f(x,y)$ имеет смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, причем эти производные непрерывны в точке M_0, то они равны в этой точке: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Задания

1 Найти полный дифференциал функции

2 Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Примеры выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

1 $z = x^2 y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

2 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение:

1 а) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$,при этом у считаем константой и выносим за знак производной: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 4\sqrt{y}$

б) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial y}$, теперь х считаем константой и выносим за знак производной: $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{4x}{2\sqrt{y}} - 6 \cdot 2y = x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y$

в) Запишем dz: $dz = \left(2xy - 4\sqrt{y}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y\right)dy$

2 а) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$,используя правило дифференцирования сложной функции, при этом у считаем константой: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

б) Вычислим $\frac{\partial z}{\partial y}$, теперь x считаем константой: $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

в) Запишем dz: $dz=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Задание 2

Исходные данные:

$z=x^2y-4x\sqrt{y}-6y^2+5$.

Решение:

1 а) Воспользуемся решением задания 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-4\sqrt{y}\ ;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y$$

б) Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2xy-4\sqrt{y}\right)'_x=2y$

в) Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y\right)'_y=\left(x^2-2xy^{-\frac{1}{2}}-12y\right)'_y=-2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y^{\frac{1}{2}}-12=x\sqrt{y}-12$

г) Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2xy-4\sqrt{y}\right)'_y=\left(2xy-4y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=2x-4\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=2x-\frac{2}{\sqrt{y}}$

д) Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y\right)'_x=2x-\frac{2}{\sqrt{y}}$

е) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $\sqrt{3y}\log_3 x+\sin(2x+3y)$	2 $\frac{x}{\sin y}+\sqrt{2x}\ln y$	3 $\frac{\log_2(3x)}{2y}$
4 $3arctg\left(x^2\cdot y^2\right)$	5 $\sqrt{3y}\ln x+\sin(2x+3y)$	6 $\arcsin\left(2x^2\cdot y^2\right)$
7 $\sin\left(2x^2+3y^2\right)$	8 $\frac{arctg\left(3x\cdot y^2\right)}{3}$	9 $\log_2\left(3x+2y^2\right)$

10 $\frac{tg\left(2x^3+y^3\right)}{3}$	11 $4arctg\left(x^2\cdot y\right)$	12 $\frac{arctg(x\cdot y)}{3}$
13 $\frac{y}{\cos x}+\sqrt{2y}\ln x$	14 $\frac{y}{\sin x}+\sqrt{5y}\ln x$	15 $\frac{\log_3(5y)}{3x}$
16 $\frac{tg\left(2x^2+3y^2\right)}{2}$	17 $\frac{\sin x}{\cos y}+\sqrt{3x}e^{2y}$	18 $\frac{\sin y}{\cos 2x}+\sqrt{x}e^{2y}$
19 $\sqrt{3y}3^x+\sin(5x-2y)$	20 $\frac{ctg\left(3x^2+2y^2\right)}{2}$	21 $\sqrt{3y}2^{3x}+\cos(3x-4y)$
22 $y^2\arccos(xy)$	23 $\frac{\ln(5xy)}{3x}$	24 $x^2\arcsin(xy)$
25 $y^2\arcsin(xy)$	26 $x^2\arccos(xy)$	27 $\sqrt{2y}\cdot 2^{3x}+\ln(3x-4y)$
28 $\sqrt{2x}\cdot 2^{3y}+\ln(3x+2y)$	29 $\log_7\left(3x^2+2y^3\right)$	30 $\frac{\log_7(3x)}{5y}$

Задание 2

1 $\frac{x}{\sin y}$	2 $3arctg(xy)$	3 $x^3+xy^2-5xy^3+y^5$
4 $\sqrt{2x}\ln y$	5 $2e^{-xy}$	6 $\sin(2x+3y)$
7 $\frac{arctg(xy)}{3}$	8 $\ln(3x+2y)$	9 $\frac{arctg(3xy)}{3}$
10 $\frac{2x}{\cos y}$	11 $\sqrt{5y}\ln x$	12 $\sin\left(2x^2+3y^2\right)$
13 $x^4+3x^2y^2-2xy^3+3y^5$	14 $4arctg(xy)$	15 $\frac{\sin x}{\cos y}$
16 $\sqrt{3x}\cdot e^{2y}$	17 $\frac{\ln(5y)}{3x}$	18 $\frac{\sin y}{\cos 2x}$
19 $arcctg(xy)$	20 $y\ln xy$	21 $\frac{y}{\cos x}$
22 $arctg\left(\frac{x}{y}\right)$	23 $\frac{\ln(xy)}{3x}$	24 $x^2\arcsin(xy)$
25 $\arcsin(xy)$	26 $x^5-4x^2y^2-3xy^3+2y^4$	27 $\arccos(xy)$
28 $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$	29 $\ln(3x+2y)$	30 $\arccos\left(\frac{y}{x}\right)$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: Могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что такое функция нескольких переменных?

2 Что такое частная производная?

3 Как обозначается частная производная?

4 Что такое полный дифференциал функции?

5 Как найти частную производную?

6 Как в нахождении частной производной используются правила и формулы дифференцирования?

7 Как найти частные производные второго, третьего и т.д. порядка?

8 Теорема о смешанных частных производных

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012

5 http://dic.academic.ru

6 http://vm.psati.ru

7 http://www.academiaxxi.ru

8 http://www.mathprofi.ru

9 http://www.allmath.ru

10 http://ru.wikipedia.org