

## Практическая работа 13 Вычисление неопределенных интегралов

**Цель:** закрепить навыки интегрирования рациональных функций, интегрирования методом замены переменной и интегрирования по частям

**Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение):** методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

**Компьютерные программы:** компьютерные программы не используются

**Содержание работы:**

**Основные понятия.**

1 Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$ , если выполняется условие  $F'(x) = f(x)$ .

2 Неопределенный интеграл – это множество всех первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

3 Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a}| + C.$$

4 Свойства интегралов

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int C \cdot f(x)dx = C \int f(x)dx$$

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

5 Формула замены переменной

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

6 Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

7 Если под знаком интеграла находится многочлен, умноженный на синус, косинус или экспоненту, то в качестве  $u$  берут многочлен, а все остальное  $dv$ .

8 Если под знаком интеграла находится многочлен, умноженный логарифм или обратные тригонометрические функции, то в качестве  $u$  берут логарифм или обратные тригонометрические функции, а все остальное  $dv$ .

### Задание

- 1 Найти неопределенный интеграл, используя свойства интегралов
- 2 Найти интегралы методом замены переменной
- 3 Найти интегралы рациональных функций
- 4 Найти интегралы методом интегрирования по частям

### Пример выполнения:

#### Исходные данные:

Вычислить интегралы.

**Задание 1**  $\int \left( 15x^4 - \cos 2x + \frac{3}{x-9} \right) dx$

**Задание 2**  $\int \frac{x dx}{x^2 - 5}$ ;  $\int \sqrt{6x + 8} dx$ ;  $\int \sin^2 x \cos x dx$

**Задание 3**  $\int \frac{3x+7}{x^2-6x+5} dx$ ;  $\int \frac{2x-1}{x^2+x+5} dx$ ;  $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9} dx$ ;

**Задание 4**  $\int (3x+7)e^x dx$ ;  $\int x^3 \ln x dx$ .

### Решение.

**Задание 1**  $\int \left( 15x^4 - \cos 2x + \frac{3}{x-9} \right) dx = 15 \int x^4 dx - \int \cos 2x + 3 \int \frac{dx}{x-9} =$   
 $= 15 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \sin 2x + 3 \ln|x-9| + C = 3x^5 - \frac{1}{2} \sin 2x + 3 \ln|x-9| + C.$

**Задание 2** а)  $\int \frac{xdx}{x^2-5} = \left. \begin{array}{l} u = x^2 - 5 \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 5| + C.$

б)  $\int \sqrt{6x+8} dx = \left. \begin{array}{l} u = 6x+8 \\ du = 6dx \\ dx = \frac{1}{6} du \end{array} \right| = \int \sqrt{u} \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9} \sqrt{(6x+8)^3} + C.$

в)  $\int \sin^2 x \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

### Задание 3

а)  $\int \frac{3x+7}{x^2-6x+5} dx =$   
 $\frac{3x+7}{x^2-6x+5} = \frac{3x+7}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-5)}{(x-5)(x-1)} =$   
 $= \frac{Ax-A+Bx-5B}{(x-5)(x-1)} = \frac{x(A+B)+(-A-5B)}{(x-5)(x-1)} =$   
 $\begin{cases} A+B=3 \\ -A-5B=7 \end{cases} \quad -4B=10; \quad B=-\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} = -2,5; \quad A=5,5$   
 $= \frac{5,5}{x-5} - \frac{2,5}{x-1}$   
 $= \int \frac{5,5 dx}{x-5} - \int \frac{2,5 dx}{x-1} = 5,5 \ln|x-5| - 2,5 \ln|x-1| + C$

б)  $\int \frac{2x-1}{x^2+x+5} dx =$   
 $\frac{2x-1}{x^2+x+5} = \frac{A(x^2+x+5)'}{x^2+x+5} + \frac{B}{x^2+x+5} = \frac{A(2x+1)+B}{x^2+x+5} = \frac{2Ax+A+B}{x^2+x+5} =$   
 $\begin{cases} 2A=2 \\ A+B=-1 \end{cases} \quad A=1; \quad B=-2$   
 $= \frac{(x^2+x+5)'}{x^2+x+5} - \frac{2}{x^2+x+5}$   
 $= \int \frac{(x^2+x+5)'}{x^2+x+5} dx - \int \frac{2 dx}{x^2+2x \cdot 0,5+0,25-0,25+5} =$

$$\begin{aligned}
&= \ln|x^2 + x + 5| - 2 \int \frac{2dx}{(x+0,5)^2 + 4,75} = \ln|x^2 + x + 5| - \frac{2}{\sqrt{4,75}} \operatorname{arctg} \frac{x+0,5}{\sqrt{4,75}} + C = \\
&= \ln|x^2 + x + 5| - \frac{4}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{B) } \int \frac{2x+3}{x^2+6x+9} dx &= \\
\frac{2x+3}{(x+3)^2} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2} = \frac{Ax+3A+B}{(x+3)^2} = \\
\begin{cases} A=2 \\ 3A+B=3 \end{cases} & \quad B=-3 \\
&= \frac{2}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} \\
&= \int \frac{2}{x+3} dx - \int \frac{3}{(x+3)^2} dx = 2 \ln|x+3| - 3 \int (x+3)^{-2} dx = 2 \ln|x+3| - 3 \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = \\
&= 2 \ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + C
\end{aligned}$$

#### Задание 4

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int (3x+7)e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u=3x+7 \quad dv=e^x dx \\ du=3dx \quad v=e^x dx \end{array} \right| = (3x+7)e^x - 3 \int e^x dx = \\
&= (3x+7)e^x - 3e^x + C = (3x+4)e^x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \int x^3 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u=\ln x \quad dv=x^3 dx \\ du=\frac{dx}{x} \quad v=\frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\
&= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C.
\end{aligned}$$

#### Задания к практической работе.

##### Задание 1

1 $\int (x^3 - 3x^2 + \frac{6}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x}) dx$	2 $\int (9+x^2) \cdot (x^3-3) dx$	3 $\int (\frac{1}{9+x^2} - 5^x + 2 \sin x) dx$
---	-----------------------------------	--

4 $\int (6x - x^2) \cdot (x^2 - 9x) dx$	5 $\int (8 - x^2) \cdot (x^2 + 2x) dx$	6 $\int \left( \frac{1}{9 - x^2} - 3^x + 3 \cos x \right) dx$
7 $\int \left( \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{4}x^4 + x \right) dx$	8 $\int \left( \frac{12}{x^5} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x - 1 \right) dx$	9 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}} - 5^x + 3 \sin x \right) dx$
10 $\int (9 + 2x^2) \cdot (x^2 - 4x) dx$	11 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} - 2 \sin x + e^x \right) dx$	12 $\int \left( \frac{3}{\sqrt{3x^2 - 12}} - e^x + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$
13 $\int \left( \frac{5}{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + 5x^4 + 1 \right) dx$	14 $\int \left( \sqrt[5]{x} + \frac{5}{x^4} + 6x^5 + 1 \right) dx$	15 $\int \left( 3x^5 - \frac{6}{x^2} + x - 7 \right) dx$
16 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} - e^x + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx$	17 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 5}} - 4^x + \frac{7}{\cos^2 x} \right) dx$	18 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{16 + x^2}} - 7^x + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx$
19 $\int \left( \frac{3}{x^7} + 6\sqrt[3]{x} + 8x^3 + 5 \right) dx$	20 $\int \left( \frac{8}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 10x^4 + x \right) dx$	21 $\int \left( \frac{1}{\sqrt{36 + x^2}} - 2^x + \sin x \right) dx$
22 $\int (6x + 2x^3) \cdot (12 - x) dx$	23 $\int (6 - 2x)(x^4 - 5) dx$	24 $\int \left( \sqrt[4]{x} + \frac{9}{x^4} - 6x^2 + 2 \right) dx$
25 $\int (1 - 6x^2) \cdot (x^3 + 1) dx$	26 $\int \left( 9x^2 - \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{x} + 1 \right) dx$	27 $\int \left( 7x^6 - \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x} + 2 \right) dx$
28 $\int \left( 12x^5 - \frac{4}{x^3} + 8\sqrt[3]{x} - 7x \right) dx$	29 $\int \left( 16x^7 - \frac{8}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3 \right) dx$	30 $\int \left( 32x^5 - \frac{6}{x^4} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 7x \right) dx$

## Задание 2

1 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$	2 $\int \cos x \sin^4 x dx$	3 $\int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 13)^4}$
4 $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$	5 $\int \frac{18x^2 dx}{(6x^3 - 1)^3}$	6 $\int \frac{3x^2 dx}{(6x^3 + 5)^7} dx$
7 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$	8 $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$	9 $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$
10 $\int \frac{e^{4x}}{5 + 2e^{4x}} dx$	11 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$	12 $\int \frac{e^{6x}}{\cos^2 x} dx$
13 $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$	14 $\int \sqrt[4]{1 - 6x^5} x^4 dx$	15 $\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx$
16 $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{3 + 5 \sin 3x}} dx$	17 $\int \sqrt{3 + \cos 5x} \sin 5x dx$	18 $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx$
19 $\int \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 2} dx$	20 $\int \frac{1 + x}{x^2 + 2x - 5} dx$	21 $\int \frac{x^6}{x^{14} + 5} dx$
22 $\int \frac{1 + 2x}{x^2 + x - 5} dx$	23 $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$	24 $\int \frac{x^2}{(x^3 + 5)^3} dx$
25 $\int \frac{x^7}{\sqrt{x^{16} + 9}} dx$	26 $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^{12} - 16}} dx$	27 $\int \sqrt[3]{1 - 6x^3} x^2 dx$
28 $\int \sqrt[4]{2x^3 - 3} x^2 dx$	29 $\int \sqrt{2 + \cos 3x} \sin 2x dx$	30 $\int \frac{e^{6x}}{\sin^2 x} dx$

### Задание 3

1 $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+4} dx$	2 $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$	3 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$
4 $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10} dx$	5 $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx$	6 $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4} dx$
7 $\int \frac{x^2-1}{x^2-x+1} dx$	8 $\int \frac{1+x}{x^2+3x-4} dx$	9 $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^2+5x+6} dx$
10 $\int \frac{3+2x}{x^2+3x-10} dx$	11 $\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx$	12 $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$
13 $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2} dx$	14 $\int \frac{x+4}{x^2-6x+9} dx$	15 $\int \frac{2x-3}{x^2-x+4} dx$
16 $\int \frac{5x-3}{x^2+2x+1} dx$	17 $\int \frac{5x+3}{x^2+2x+1} dx$	18 $\int \frac{2x-3}{x^2+5x+6} dx$
19 $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^2-6x+9} dx$	20 $\int \frac{1+x}{x^2+2x+5} dx$	21 $\int \frac{3x^3+4x^2+2}{x^2-6x+9} dx$
22 $\int \frac{3x+4}{x^2-x+1} dx$	23 $\int \frac{x-5}{x^2-x+1} dx$	24 $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$
25 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+10} dx$	26 $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+9} dx$	27 $\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6} dx$
28 $\int \frac{3x^3+2x-1}{x^2+3x-10} dx$	29 $\int \frac{x+2}{x^2+3x+2} dx$	30 $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2} dx$

### Задание 4

1 $\int \arcsin x dx$	2 $\int x \ln 3x dx$	3 $\int (4x^3+6x-7) \ln x dx$
4 $\int x^2 \cos x dx$	5 $\int x \operatorname{arctg} x dx$	6 $\int x^3 \sin x^2 dx$
7 $\int \ln^2 x dx$	8 $\int x^2 \sin x dx$	9 $\int (x+2) \sin 5x dx$
10 $\int \frac{xdx}{\sin^2 3x}$	11 $\int \ln x dx$	12 $\int (x+1) \cos 3x dx$
13 $\int x \sin x dx$	14 $\int x \cos x dx$	15 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$
16 $\int x^2 e^x dx$	17 $\int \ln \frac{x}{2} dx$	18 $\int (x+1) e^x dx$
19 $\int x \cos 3x dx$	20 $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$	21 $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$
22 $\int x \ln x dx$	23 $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$	24 $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$
25 $\int \frac{xdx}{\cos^2 5x}$	26 $\int x \sin 2x dx$	27 $\int x \operatorname{arctg} 4x dx$
28 $\int x \cos \frac{x}{3} dx$	29 $\int (3x-5) \ln x dx$	30 $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

**Порядок выполнения задания, методические указания:** - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

**Содержание отчета:** отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

**Контрольные вопросы:**

- 1 Чем первообразная отличается от неопределенного интеграла?
- 2 Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?
- 3 Формула замены переменной
- 4 Формула вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.
- 5 Как выбирать  $u$  и  $v$  при использовании метода интегрирования по частям?
- 6 В чем заключается суть метода замены переменной при вычислении интегралов?

**Литература:**

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, г.Ростов-на-Дону, «Феникс», 2012
- 4 В.С. Шипачев Задачник по высшей математике –М 2001
- 5 <http://mvm-math.narod.ru>
- 3 <http://www.pm298.ru>
- 7 <http://www.fxyz.ru>
- 8 <http://old.college.ru>