

Практическая работа 7

Выполнение операций над графами

Цель работы: закрепить умения вычислять числовые характеристики и выполнять операции над графами

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Величину $d(v, w)$ (конечную или бесконечную) будем называть расстоянием между вершинами v, w . Это расстояние удовлетворяет аксиомам метрики:

- $d(v, w) \geq 0$, причем $d(v, w) = 0$ тогда и только тогда, когда $v = w$;
- $d(v, w) = d(w, v)$;
- $d(v, w) = d(v, u) + d(u, w)$.

2 Диаметром связного графа называется максимально возможное расстояние между двумя его вершинами.

3 Центром графа называется такая вершина, что максимальное расстояние между ней и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных.

4 Наименьшее из всех возможных расстояний между вершиной и любой другой вершиной называется радиусом графа.

5 Матрица $D(G)$ расстояний между вершинами графа – это матрица, элементами d_{ij} которой являются кратчайшие расстояния между вершинами v_i и v_j . Матрица $D(G)$ симметрична относительно главной диагонали.

6 Для получения новых графов можно использовать разнообразные операции над графами. Существуют два вида операций - локальные, при которых заменяются, удаляются или добавляются отдельные элементы графа, и алгебраические, когда новый граф строится по определенным правилам из нескольких имеющихся.

7 Локальные операции – это удаление и добавление ребра или вершины, стягивание и подразбиение ребра.

8 При удалении ребра сохраняются все вершины графа и все его ребра, кроме удаляемого. Обратная операция - добавление ребра.

9 При удалении вершины вместе с вершиной удаляются и все инцидентные ей ребра. При добавлении вершины к графу добавляется новая изолированная вершина.

10 Операция стягивания ребра определяется следующим образом. Вершины a и b удаляются из графа, к нему добавляется новая вершина c и она соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна хотя бы одна из вершин a, b .

11 Операция подразбиения ребра действует следующим образом. Из графа удаляется это ребро, к нему добавляется новая вершина c и два новых ребра (a, c) и (b, c) .

12 Дополнением графа $G_1(V_1, E_1)$ называется граф $\overline{G_1}(V_1, \overline{E_1})$, множеством вершин которого является множество V_1 , а множеством его рёбер является множество $\overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_2 : e \notin E_1\}$.

13 Объединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cup E_2$.

14 Пересечением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cap E_2$.

15 Суммой по модулю два графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер – множество $E_1 \oplus E_2$. Т. е. этот граф не имеет изолированных вершин и состоит только из рёбер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором графе, но не в обоих графах одновременно.

Задания

1 Дан неориентированный граф. Определить

- диаметр и радиус этого графа;
- центры графа;
- цикломатическое число данного графа.

2 Выполнить следующие действия:

- удалить ребро $(1; 2)$ и вершину 5;
- добавить вершину 7;
- добавить ребра $(2; 6)$ и $(3; 7)$;
- стянуть ребро $(3; 4)$

3 Даны два графа G_1 и G_2 . Построить их дополнения, пересечение, объединение и сумму по модулю два.

Пример выполнения:

Задание 1

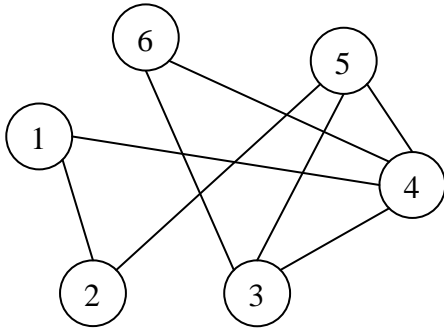
Исходные данные:

$$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 2)\}$$

Решение

1 Изобразим граф:



2 Составим матрицу кратчайших маршрутов:

$$D = \begin{matrix} 1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ \text{---} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

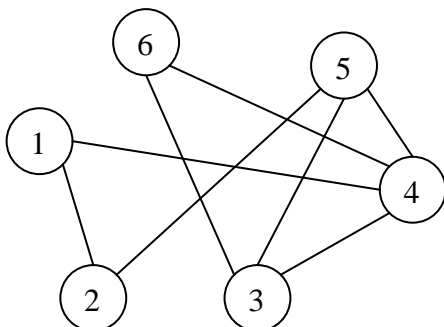
3 Используя матрицу, определим

- радиус $r = \min D = 1$;
- диаметр $d = \max D = 3$;
- центры – вершины 1, 3, 4, 5

4 Цикломатическое число $V = 1 + 8 - 6 = 3$, т.к. в данном графе 1 связная компонента, 6 вершин и 8 ребер

Задание 2

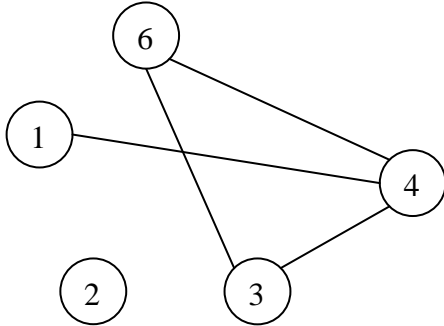
Исходные данные:



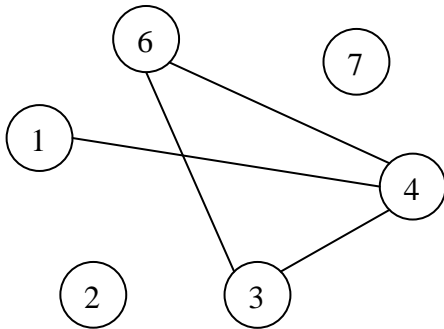
Решение

Выполним действия:

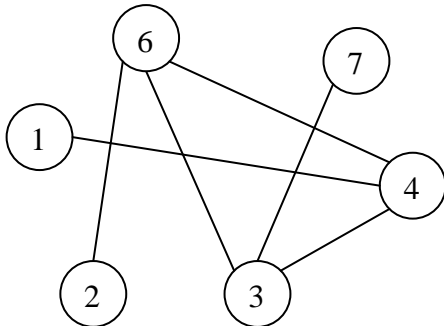
1 удалим ребро (1; 2) и вершину 5, вместе с вершиной удалим инцидентные ей ребра;



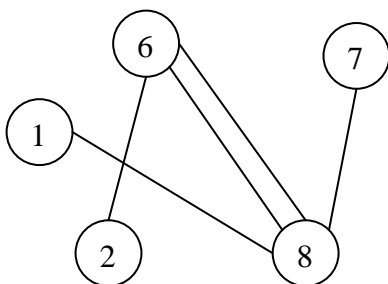
2 добавим вершину 7;



3 добавим ребра (2; 6) и (3; 7);



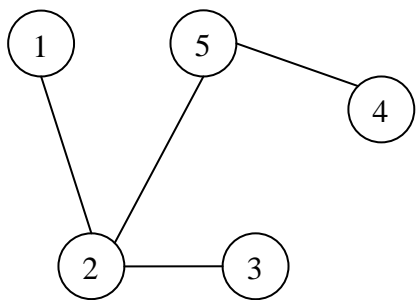
4 стянем ребро (3; 4), для этого добавим вершину 8 и все ребра, инцидентные вершинам 3 и 4, проведем к ней, после чего удалим вершины 3 и 4



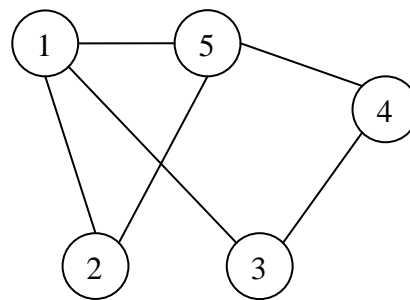
Задание 3

Исходные данные:

G_1

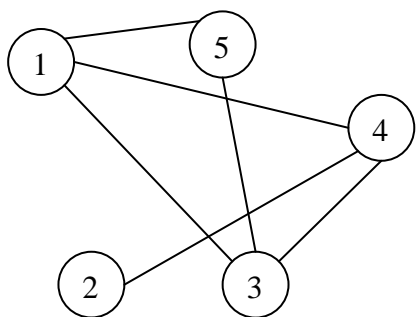


G_2

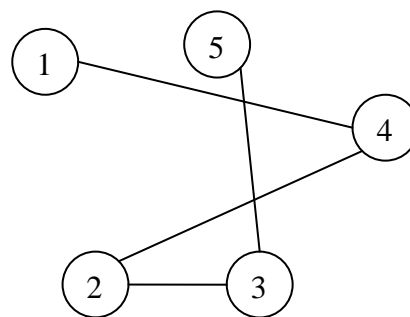


Решение

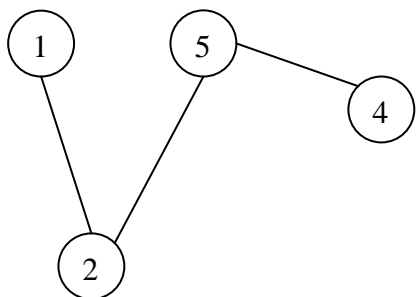
$\overline{G_1}$



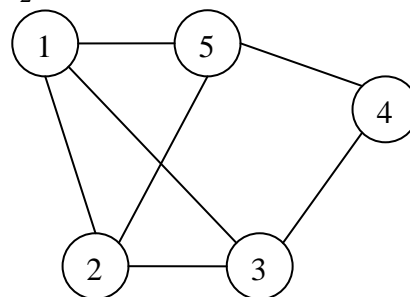
$\overline{G_2}$



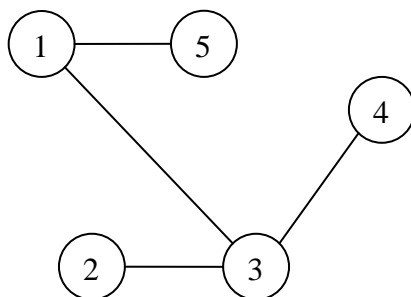
$G_1 \cap G_2$



$G_1 \cup G_2$



$G_1 \oplus G_2$



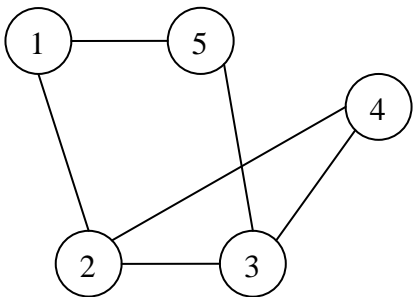
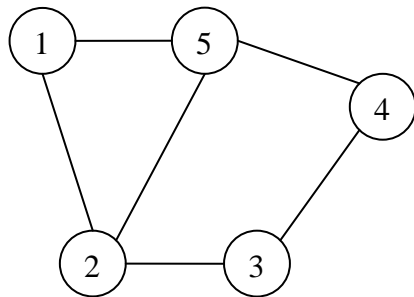
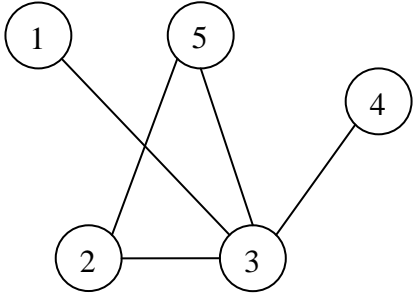
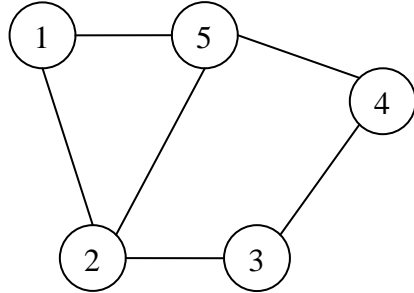
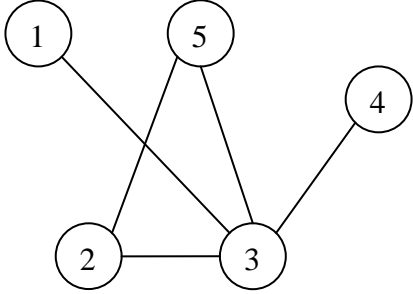
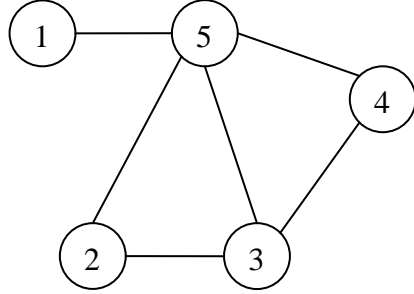
Задания к практической работе.

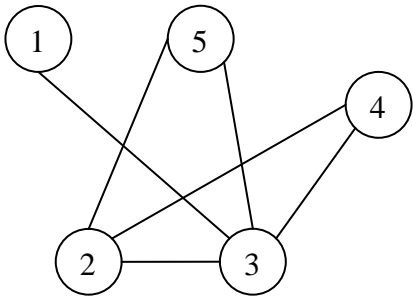
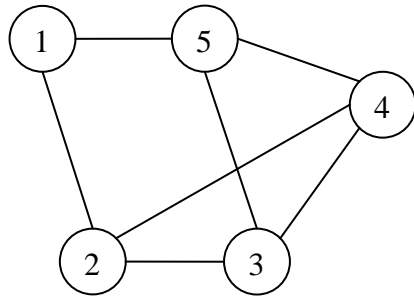
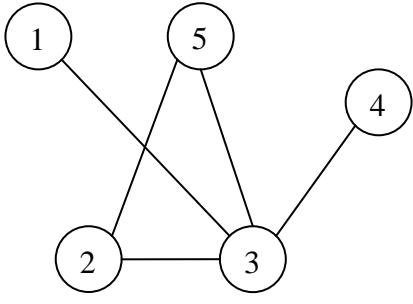
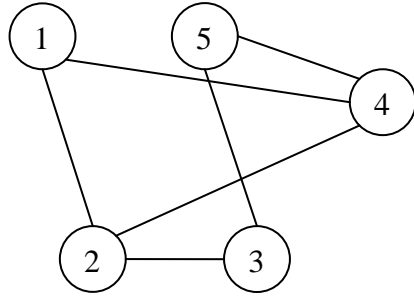
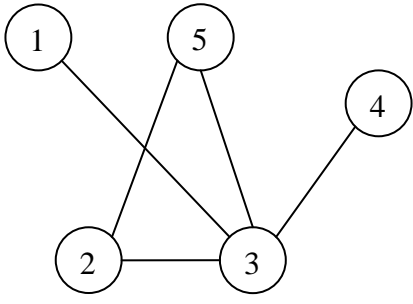
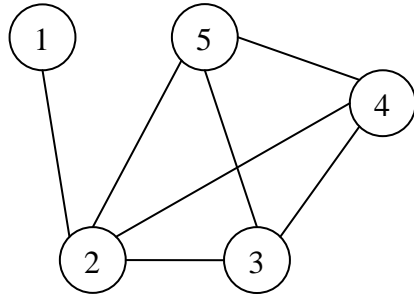
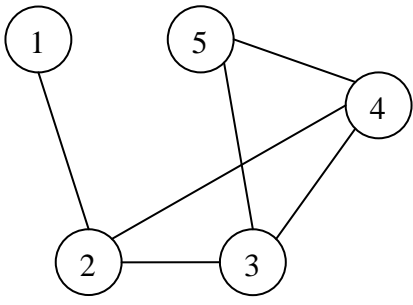
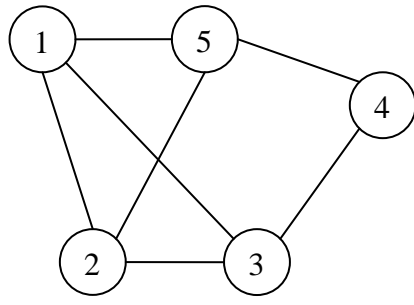
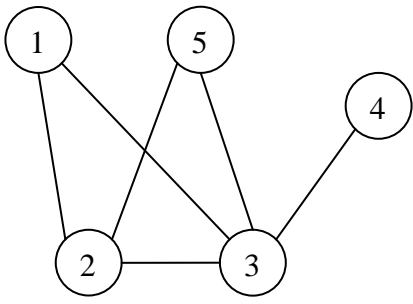
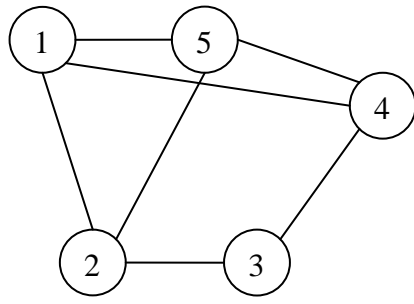
Задание 1-2

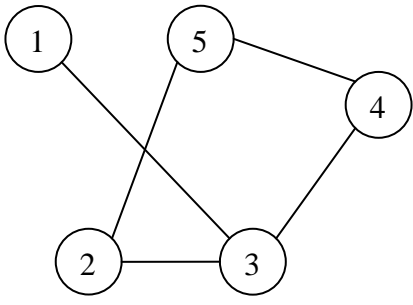
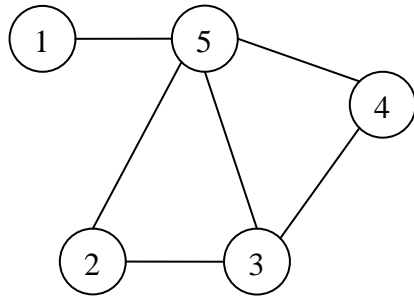
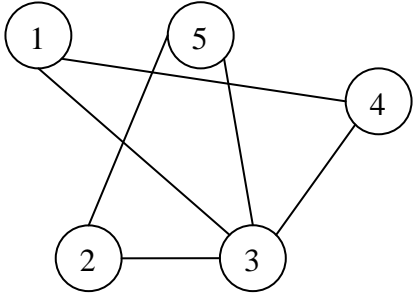
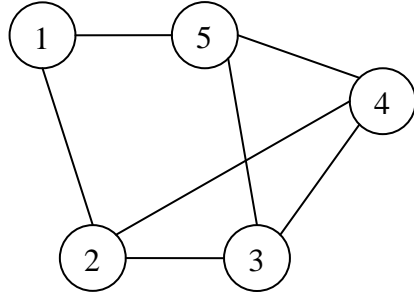
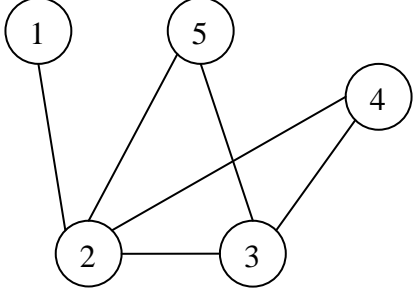
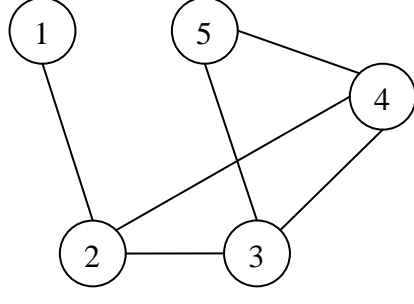
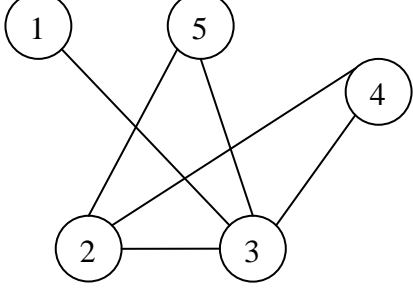
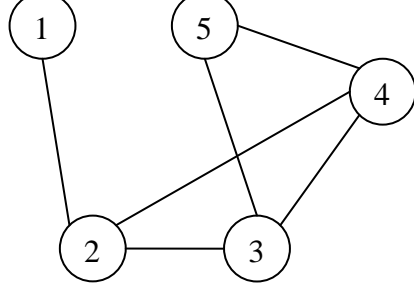
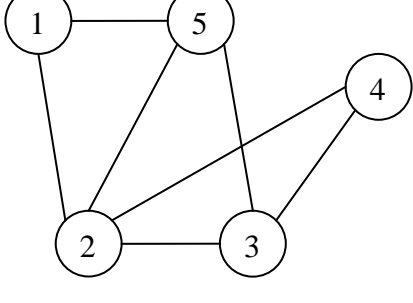
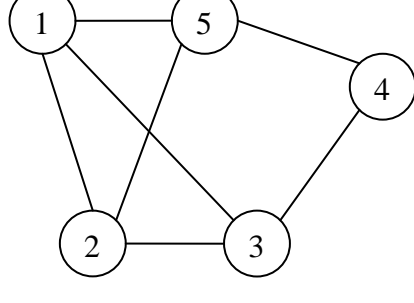
1	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$	2	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 6); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$
3	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6); (5; 1)\}$	4	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 1)\}$
5	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)\}$	6	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 4); (5; 6)\}$
7	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$	8	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$
9	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4); (5; 6)\}$	10	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3)\}$
11	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 6); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$	12	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 6); (3; 5); (4; 3); (4; 5)\}$
13	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$	14	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$
15	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6)\}$	16	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (5; 1)\}$
17	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)\}$	18	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)\}$
19	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$	20	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 3); (1; 4); (2; 1); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (6; 1)\}$
21	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)\}$	22	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 6); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 6)\}$

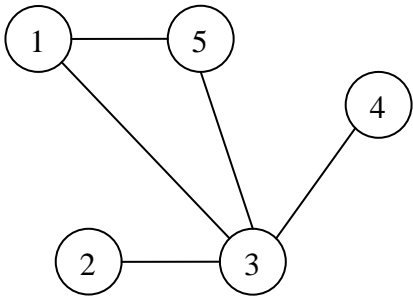
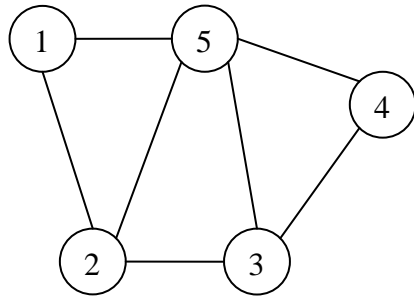
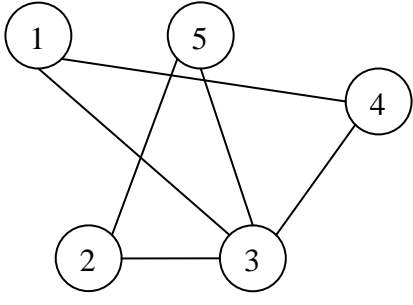
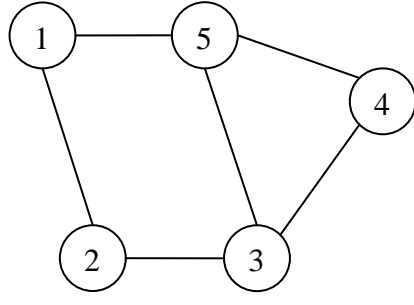
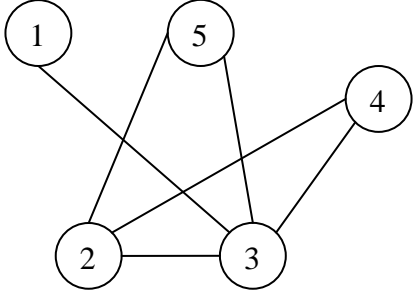
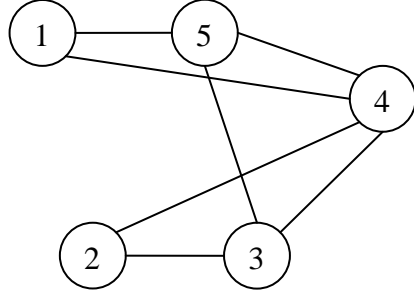
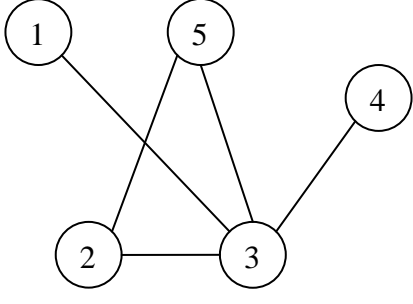
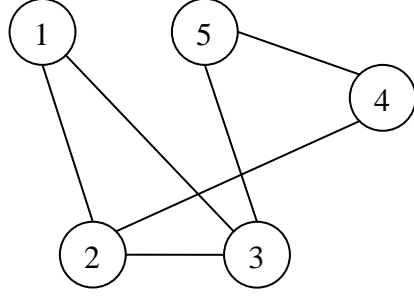
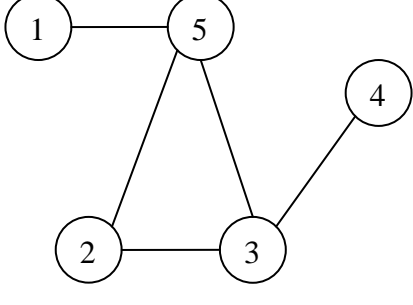
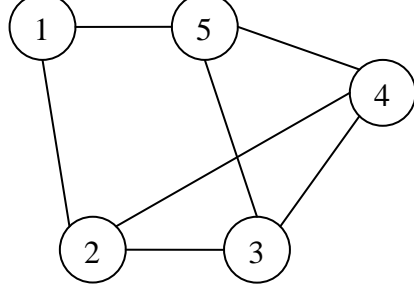
23	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 6); (5; 1)\}$	24	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (6; 1)\}$
25	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (1; 3); (2; 3); (4; 3); (5; 6)\}$	26	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 6)\}$
27	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 1)\}$	28	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$
29	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)\}$	30	$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $E = \{(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

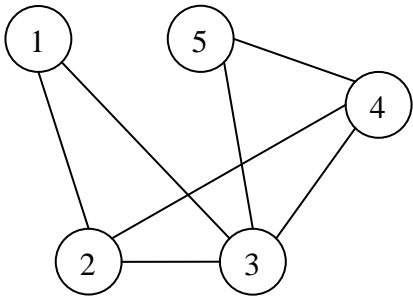
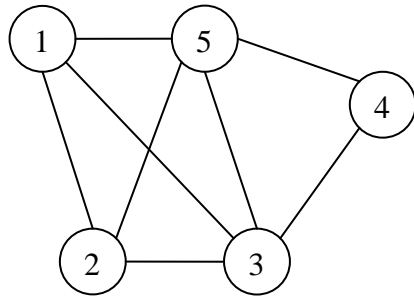
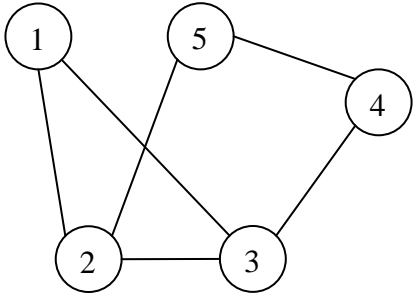
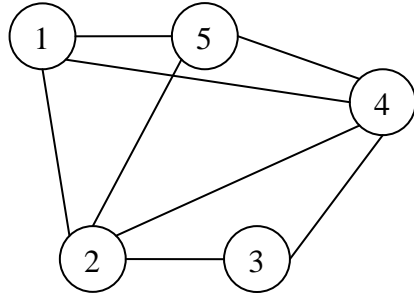
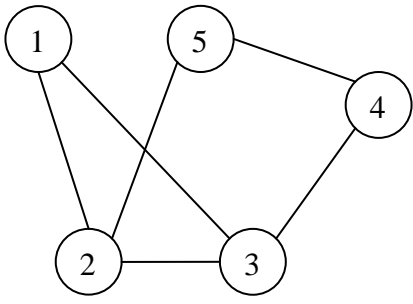
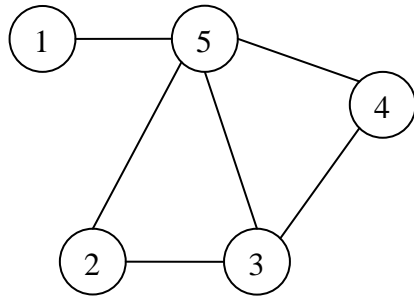
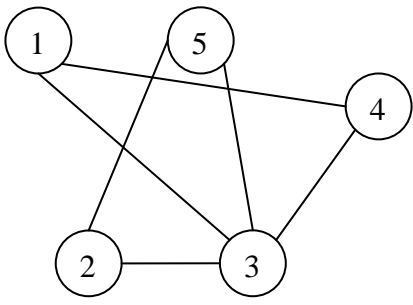
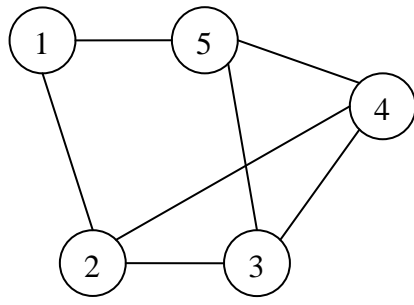
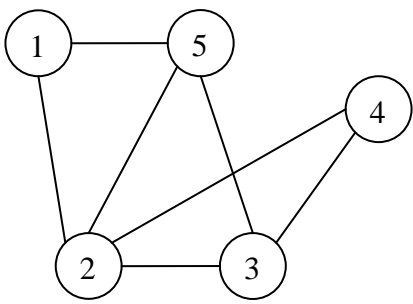
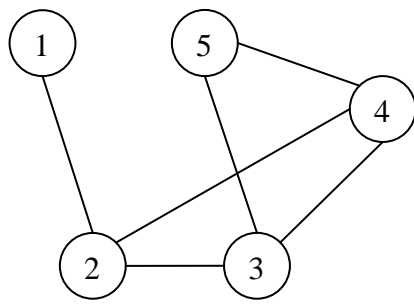
Задание 3

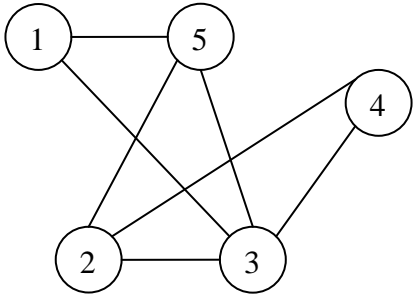
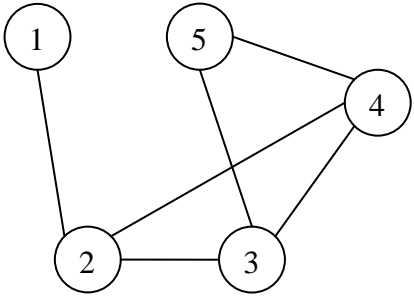
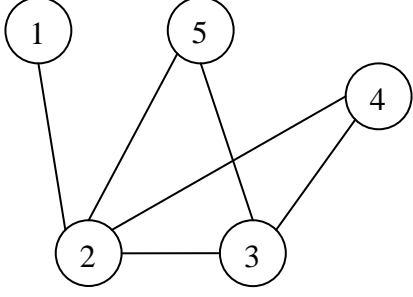
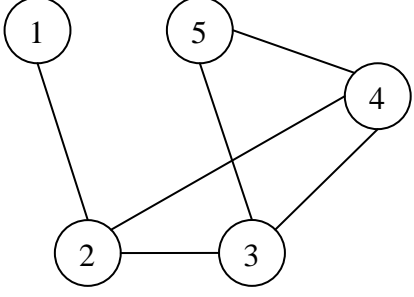
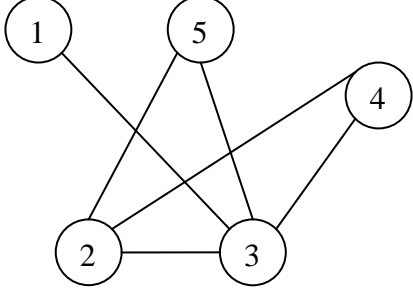
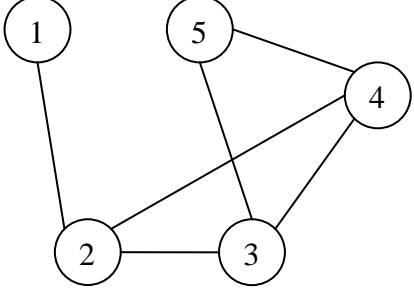
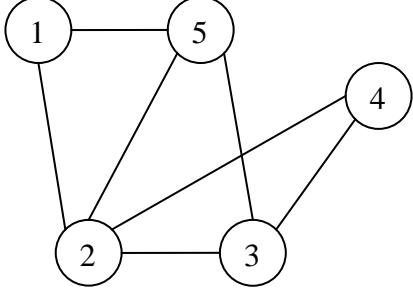
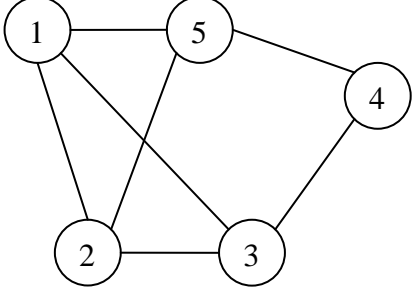
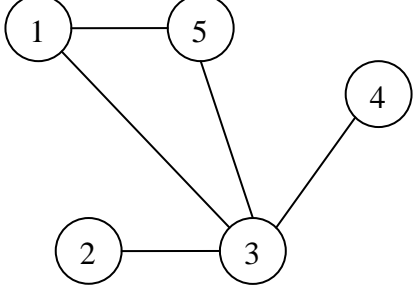
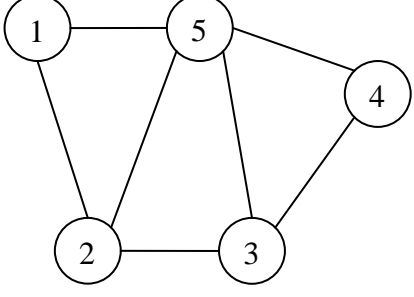
1	G₁ 	G₂ 
2	G₁ 	G₂ 
3	G₁ 	G₂ 

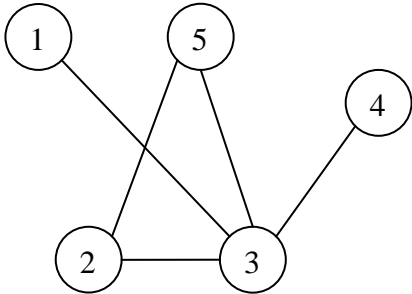
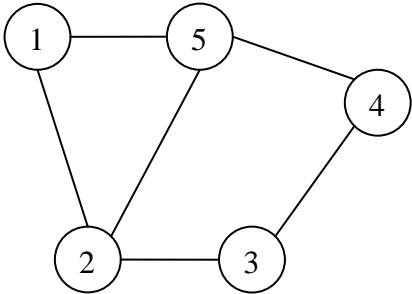
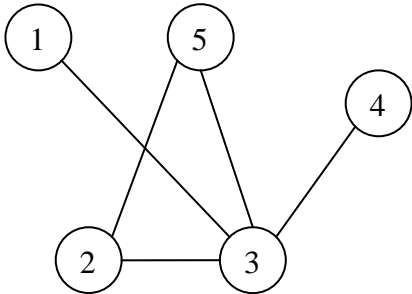
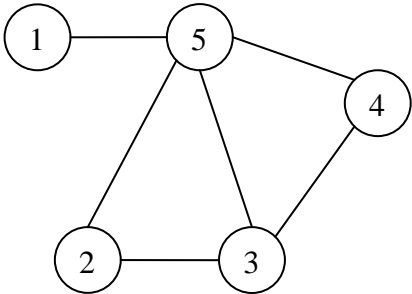
4	G₁ 	G₂ 
5	G₁ 	G₂ 
6	G₁ 	G₂ 
7	G₁ 	G₂ 
8	G₁ 	G₂ 

9	G₁ 	G₂ 
10	G₁ 	G₂ 
11	G₁ 	G₂ 
12	G₁ 	G₂ 
13	G₁ 	G₂ 

14	G₁ 	G₂ 
15	G₁ 	G₂ 
16	G₁ 	G₂ 
17	G₁ 	G₂ 
18	G₁ 	G₂ 

19	G₁ 	G₂ 
20	G₁ 	G₂ 
21	G₁ 	G₂ 
22	G₁ 	G₂ 
23	G₁ 	G₂ 

24	G₁ 	G₂ 
25	G₁ 	G₂ 
26	G₁ 	G₂ 
27	G₁ 	G₂ 
28	G₁ 	G₂ 

29	G₁ 	G₂ 
30	G₁ 	G₂ 

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Что такое расстояние между вершинами графа?
- 2 Что такое диаметр графа?
- 3 Что такое радиус графа?
- 4 Что такое центр графа?
- 5 Для чего служит матрица расстояний в графе?
- 6 Для чего выполняются действия над графами?
- 7 На какие группы можно разделить операции над графами?
- 8 Что такое локальные действия?
- 9 Какие действия относятся к локальным?
- 10 Как удалить и добавить ребро?
- 11 Как удалить и добавить вершину?
- 12 Что такое стягивание ребра и как его выполнить?
- 13 Как выполняется подразбиение ребра?

- 14 Какие действия относятся к алгебраическим?
- 15 Что такое дополнение графа?
- 16 Как изобразить дополнение графа?
- 17 Объединение графов
- 18 Из каких элементов состоит граф объединения?
- 19 Пересечение графов
- 20 Из каких элементов состоит граф пересечения?
- 21 Сумма по модулю два
- 22 Из каких элементов состоит граф суммы по модулю два?

Литература:

- 1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова . - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.
- 2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.
- 3 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.
- 4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.
- 5 Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика Ростов-на-Дону Феникс 2012г.
- 6 <http://ru.wikipedia.org/wiki>
- 7 <http://habrahabr.ru/post/93296/>
- 8 <http://www.e-ope.ee>
- 9 <http://cyberfac.ru>
- 10 <http://www.matburo.ru>
- 11 <http://www.toehelp.ru>
- 12 http://one_vision.jofo.ru/256084.html
- 13 <http://www.intuit.ru/studies/courses/101/101/lecture/2945?page=4>