

Практическая работа 6

Графы. Способы задания графов. Степени вершин.

Цель работы: научиться задавать граф, вычислять степени вершин и цикломатическое число графа.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: Компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Граф G - совокупность двух множеств: вершин V и ребер E , между которыми определено отношение инцидентности. Если $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$, то граф G есть (n,m) граф, где n - порядок графа, m - размер графа.

2 Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v' , v'' , которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными.

3 Ребро (v',v'') может быть ориентированным и иметь начало (v') и конец (v'') (дуга в орграфе).

4 Ребро (v,v) называется петлей (концевые вершины совпадают).

5 Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

6 Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

7 Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

8 Конечный граф - число вершин и ребер конечно.

9 Пустой граф - множество ребер пусто (число вершин может быть произвольным).

10 Полный граф - граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединена ребром.

11 Локальная степень вершины - число ребер ей инцидентных.

12 В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степень вершины.

13 В орграфе сумма входящих ребер всех вершин равна сумме исходящих ребер всех вершин и равна числу ребер графа.

14 Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

15 Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются изоморфными.

16 Способы задания графов:

- явное задание графа как алгебраической системы;
- геометрический;
- матрица смежности;
- матрица инцидентности

17 Матрица инцидентности: По вертикали указываются вершины, по горизонтали - ребра. $a_{ij}=1$ если вершина i инцидентна ребру j , в противном случае $a_{ij}=0$. Если ребро - петля, то $a_{ij}=2$. Матрицей инцидентности (инциденций) ориентированного графа называется матрица, для которой $a_{ij}=1$, если вершина является началом дуги, $a_{ij}=-1$, если является концом дуги, в остальных случаях $a_{ij}=0$.

18 Матрица смежности - квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали - все вершины. a_{ij} = число ребер, соединяющее вершины i, j . Матрицей смежности ориентированного графа называется матрица, для которой $a_{ij}=1$, если вершина является началом дуги, в остальных случаях $a_{ij}=0$.

19 Плоский граф - граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимися ребрами.

20 Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются изолированными.

21 Пусть в графе m - число ребер, n - число вершин, p - число компонент связности. Цикломатическим числом графа называют число $V = m - n + p$.

22 Компонента связности графа — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.

Пример выполнения:

Исходные данные:

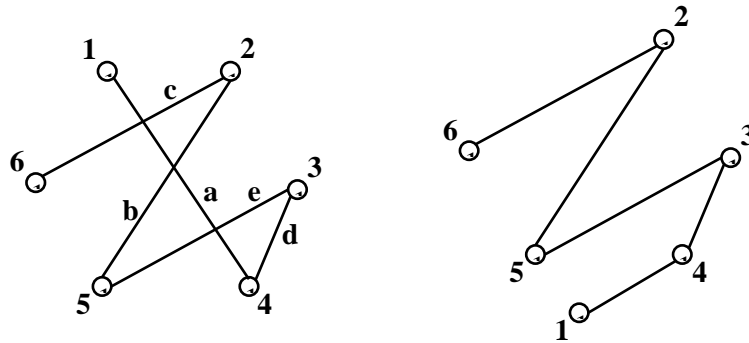
1 Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

$$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; E = \{a; b; c; d; e\}$$

$$E = \{(1; 4); (2; 5); (2; 6); (3; 4); (3; 5)\}$$

Решение:

1 Изобразим граф, соединив вершины. Ребро а соединяет вершины 1 и 4, в соединяет вершины 2 и 5 и т. д. Затем преобразуем этот граф в плоский:



2 Составим матрицу смежности. В первом столбце и первой строке выпишем вершины. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке 1 и строке 4 ставим 1, а также колонке 4 и строке 1 ставим 1. Ребру в инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке 2 в строке 5 и колонке 5 строке 2 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы содержат нули.

3 Составим матрицу инцидентности. В первом столбце выпишем вершины, первой строке – ребра. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке а в строке 1 и строке 4 ставим 1. Ребру в инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке в в строке 2 и строке 5 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы заполняем нулями.

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0

Матрица инцидентности

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0

4 Вычислим степени вершин:

$$\rho(1) = 1 \quad \rho(2) = 2 \quad \rho(3) = 2 \quad \rho(4) = 2 \quad \rho(5) = 2 \quad \rho(6) = 1$$

$$\rho(1) + \rho(2) + \rho(3) + \rho(4) + \rho(5) + \rho(6) = 10 = 2 \cdot q$$

$$q = 5 \text{ (ребер 5)}$$

5 Цикломатическое число графа:

$$V = 1 + 5 - 6 = 0$$

Исходные данные:

2 Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

	a	b	c	d	e	f
1	-1	-1	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	0	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1
6	0	1	0	0	0	1

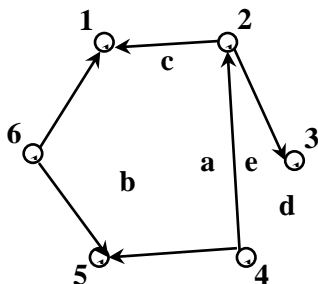
Решение:

1 Количество вершин – 6. $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2 Ребро **a** выходит из вершины 2, т.к. в ячейке (2; 1) стоит 1, а приходит в вершину 1 (в ячейке (1; 1) находится -1) и т.д.

Получим множество $E = \{(2; 1); (6; 1); (4; 2); (2; 3); (4; 5); (6; 5)\}$

3 Изобразим граф, соединив вершины, этот граф уже плоский, т.к. ребра не пересекаются:



4 Составим матрицу смежности.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	0

5 Вычислим степени вершин:

$$\rho_1(1) = 0$$

$$\rho_2(1) = 2$$

$$\rho_1(2) = 2$$

$$\rho_2(2) = 1$$

$$\rho_1(3) = 0$$

$$\rho_2(3) = 1$$

$$\rho_1(4) = 2$$

$$\rho_2(4) = 0$$

$$\rho_1(5) = 0$$

$$\rho_2(5) = 2$$

$$\rho_1(6) = 2$$

$$\rho_2(6) = 0$$

$$\rho_1(1) + \rho_1(2) + \rho_1(3) + \rho_1(4) + \rho_1(5) + \rho_1(6) = 6$$

$$\rho_2(1) + \rho_2(2) + \rho_2(3) + \rho_2(4) + \rho_2(5) + \rho_2(6) = 6$$

$$q = 6 \text{ (ребер 6)}$$

6 Цикломатическое число графа:

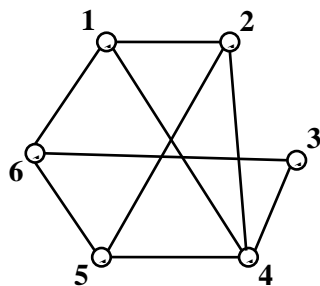
$$V = 1 + 6 - 6 = 1$$

Задания к практической работе.

1 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)\}$$

2



3 Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4);$$

7

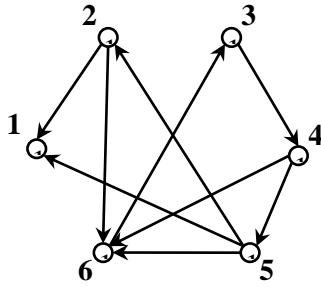
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0	1

8

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1

(4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)}

4



5

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	1	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0

6 Οργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (3; 1); (3; 6);$
 $(4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 1)\}$

12 Οργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 5); (1; 6); (2; 1); (3; 2); (3; 4);$
 $(4; 2); (5; 4); (5; 3); (6; 3)\}$

13

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	-1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
6	0	1	0	0	1	-1	0	0	0

14

2	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	0
5	1	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	0

9 Οργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4);$
 $(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

10 Ηοργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1);$
 $(3; 6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

11

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	-1	0	0	1	1	0	0
3	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0
6	0	1	0	0	1	0	-1	0	-1

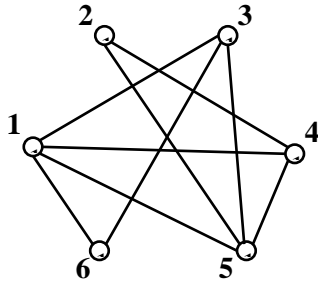
18

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

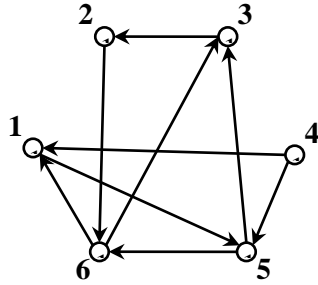
19 Οργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 6); (1; 5); (2; 1); (2; 4); (3; 5);$
 $(4; 1); (4; 6); (5; 6); (6; 3)\}$

20 Ηοργραφ $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$



15



16 Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (3; 4); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

17 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 5); (2; 6); (2; 3); (3; 4); (4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 3)\}$

24 Неорграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

25 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)\}$

26

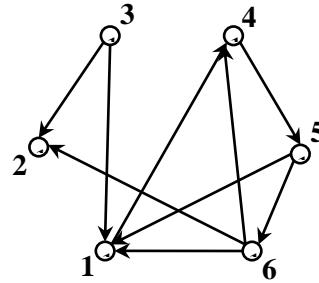
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	1	0	0	1

$E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

21

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	1	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1	-1	0	0

22



23 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 3); (3; 4); (3; 6); (4; 2); (4; 5); (5; 1); (6; 2)\}$

30 Орграф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

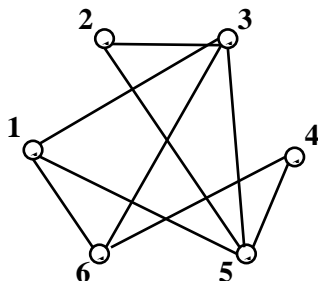
$E = \{(1; 3); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)\}$

31

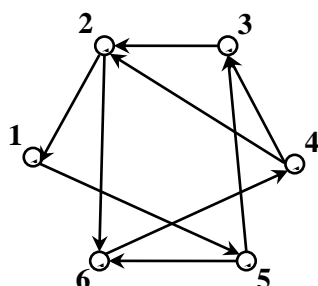
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	1
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1
4	0	1	1	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1	0

4	0	1	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	1	0	0

27



28



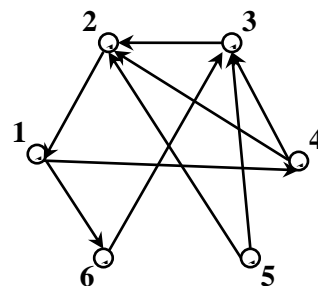
29 Неограф $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$E = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)\}$

32

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	1	0
4	1	1	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0

33



Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Что такое граф?
- 2 Что такое инцидентное ребро или инцидентная вершина?
- 3 Что такое петля?
- 4 Какое ребро называется ориентированным?
- 5 Что такое кратные ребра?

- 6 Что такое неограф?
- 7 Что такое оргграф?
- 8 Какие вершины называются смежными?
- 9 Что такое конечный граф?
- 10 Что такое пустой граф?
- 11 Что такое полный граф?
- 12 Что такое локальная степень вершины?
- 13 Лемма о рукопожатиях.
- 14 Как связаны степени вершин в оргграфе?
- 15 Какие графы называются равными?
- 16 Что такое изоморфные графы?
- 17 Способы задания графов.
- 18 Что такое матрица смежности?
- 19 Что такое матрица инцидентности?
- 20 Что такое плоский граф?
- 21 Что такое изолированные вершины?
- 22 Цикломатическое число графа
- 23 Связная компонента графа

Литература:

- 1 Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика Ростов-на-Дону Феникс 2012 г.
- 2 <http://cyberfac.ru>
- 3 <http://www.matburo.ru>
- 4 <http://www.toehelp.ru>