

## Практическая работа 16

### Вычисление несобственных и двойных интегралов.

**Цель работы:** научиться вычислять несобственные интегралы первого и второго рода и двойные интегралы по прямоугольной и криволинейной области.

**Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение):** методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

**Компьютерные программы:** компьютерные программы не используются

**Содержание работы.**

**Основные понятия.**

1 Пусть  $f(x)$  задана на бесконечном промежутке  $[a; \infty)$  и для всякого  $A \geq a$  существует интеграл  $\int_a^A f(x)dx$ . Предел  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$  называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается  $\int_a^{\infty} f(x)dx$

2 Если  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$  существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

3 Пусть  $f(x)$  задана на полуинтервале  $[a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ . Пусть далее для всякого  $0 < \delta < b - a$  существует интеграл  $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ . Предел  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$  называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается  $\int_a^b f(x)dx$

4 Если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$  существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

5 Двойным интегралом от функции  $f(x, y)$  по области  $D$  называется предел интегральных сумм  $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$ , где  $S_i$  - разбиение области  $D$ ,  $\Delta S_i$  - площадь  $i$ -го разбиения,  $M_i \in S_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ .

6 Свойства двойных интегралов:

$$- \iint_D C \cdot f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C = const.$$

$$- \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy.$$

$$- \iint_{D=D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

7 Сведение двойного интеграла к повторному

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad \text{где } D = \{a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx, \quad \text{где } D = \{a \leq y \leq b, \quad \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$$

### Задание

1 Вычислить несобственный интеграл первого рода или установить его расходимость.

2 Вычислить несобственный интеграл второго рода или установить его расходимость.

3 Вычислить двойной интеграл по прямоугольной области.

4 Вычислить двойной интеграл по криволинейной области.

### Примеры выполнения:

#### Задание 1

##### Исходные данные:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10}}$$

##### Решение:

По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-10} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-9}}{-9} \right|_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{9x^9} \right) = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Следовательно, несобственный интеграл первого рода сходится.

## Задание 2

**Исходные данные:**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{x}}$$

**Решение:**

Точка  $x = 0$  особая. По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{-\frac{1}{7}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left. \frac{x^{\frac{6}{7}}}{\frac{6}{7}} \right|_a^1 = \frac{7}{6} \lim_{a \rightarrow 0} x^{\frac{6}{7}} \Big|_a^1 = \frac{7}{6} \left( 1^{\frac{6}{7}} - 0 \right) = \frac{7}{6}$$

Следовательно, несобственный интеграл второго рода сходится.

## Задание 3

**Исходные данные:**

$$\iint_D xy dx dy, \text{ где } D: 3 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 1$$

**Решение:**

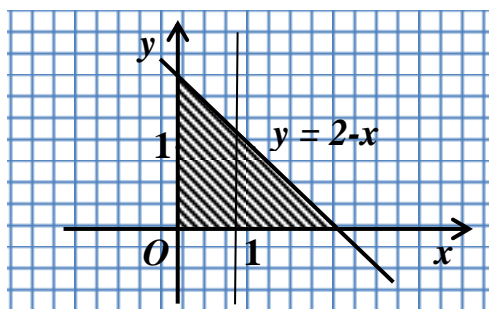
$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_3^5 dx \int_0^1 xy dy = \int_3^5 x dx \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \int_3^5 \frac{x}{2} (1 - 0) dx = \int_3^5 \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^2}{2 \cdot 2} \right|_3^5 = \\ &= \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

## Задание 4

**Исходные данные:**

$$1 \iint_D (4x + y) dx dy, \text{ где } D: x + y = 2, \quad x = 0 \quad y = 0$$

**Решение:**



Построим область D:  $y = 2 - x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$

Область ограничена слева и справа прямыми  $x = 0$ ;  $x = 2$ , сверху и снизу область ограничивают линии  $y = 2 - x$  и  $y = 0$ .

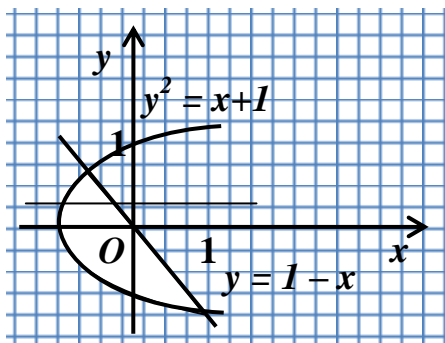
Получим

$D = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$ , тогда

$$\begin{aligned} \iint_D (4x + y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4x + y) dy = \int_0^2 \left( 4xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} dx = \\ &= \int_0^2 \left( 4x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^2 \left( 8x - 4x^2 + \frac{4-4x+x^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left( 8x - 4x^2 + \frac{4-4x+x^2}{2} \right) dx = \int_0^2 \left( 8x - 4x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left( 6x + 2 - \frac{7x^2}{2} \right) dx = \left( 3x^2 + 2x - \frac{7x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = 12 + 4 - \frac{28}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2  $\iint_D dx dy; D = \{(x; y) \mid y^2 = x + 1; x + y = 1\}$

**Решение:**



Построим область D:

$$D = \{(x; y) \mid y^2 = x + 1; x + y = 1\}$$

По графику можно увидеть, что ордината области расположена между точками пересечения графиков функций, а абсцисса области между линиями  $y^2 = x + 1; x + y = 1$

Найдем точки пересечения графиков функций:

$$y^2 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 - 1;$$

$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y;$$

$$y^2 - 1 = 1 - y; \quad y^2 + y - 2 = 0; \quad D = 1 + 8 = 9; \quad y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$D = \{(x; y) \mid -2 \leq y \leq 1; \quad y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y\}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{-2}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^1 dy x \Big|_{y^2-1}^{1-y} = \int_{-2}^1 (1 - y - y^2 + 1) dy = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \\ &= \left( 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 8 - 3 - 0,5 = 4,5 \end{aligned}$$

## Задания к практической работе.

### Задание 1

$1 \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$	$2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	$3 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$	$4 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$	$5 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$
$6 \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$	$7 \int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x} dx$	$8 \int_{-\infty}^0 xe^x dx$	$9 \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$	$10 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$
$11 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	$12 \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$	$13 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	$14 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$	$15 \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$
$16 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$	$17 \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$	$18 \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$	$19 \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$	$20 \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x}$
$21 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$	$22 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$	$23 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+8}$	$24 \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$	$25 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^7}$
$26 \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	$27 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^5}$	$28 \int_0^{+\infty} xe^{x^2} dx$	$29 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$	$30 \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$

### Задание 2

$1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2 \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3}$	$3 \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$	$4 \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$	$5 \int_0^e \frac{dx}{x \ln^4 x}$
$6 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$	$7 \int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	$8 \int_0^1 \ln x dx$	$9 \int_{-3}^1 \frac{dx}{3+x}$	$10 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1-x^3}$
$11 \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$	$12 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \ln x}$	$13 \int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	$14 \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$	$15 \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$
$16 - \int_{0,5}^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$	$17 \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$	$18 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$	$19 \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$	$20 \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$
$21 \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$	$22 \int_0^1 \frac{dx}{x-1}$	$23 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	$24 \int_0^e \frac{\ln^4 x dx}{x}$	$25 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$
$26 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$	$27 \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$	$28 \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x+1}}$	$29 \int_{-3}^1 \frac{dx}{(3+x)^5}$	$30 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

### Задание 3

1 $\iint_D 3xy^2 dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 2\}$	2 $\iint_D 9x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 2\}$
3 $\iint_D \frac{3y}{x} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq e; 4 \leq y \leq 6\}$	4 $\iint_D \frac{y}{2x} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq e; 4 \leq y \leq 6\}$
5 $\iint_D (x - 3y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 3\}$	6 $\iint_D (x - y) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 3\}$
7 $\iint_D (x + y) dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 2\}$	8 $\iint_D (2x + 3y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 2\}$
9 $\iint_D (3x^2 + 2y) dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 2\}$	10 $\iint_D (5x - 2y) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4\}$
11 $\iint_D (xy - 3y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 3; 4 \leq y \leq 6\}$	12 $\iint_D (3y^2 - xy) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 3; 4 \leq y \leq 6\}$
13 $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$	14 $\iint_D (3x^2 y - 3x^3) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2\}$
15 $\iint_D (6xy^2 - 4x) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 3\}$	16 $\iint_D (6y^2 + 2xy) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 2; 5 \leq y \leq 6\}$
17 $\iint_D (8x - 3y) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4\}$	18 $\iint_D (x + 2y) dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 2\}$
19 $\iint_D \frac{3y}{x} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq e; 4 \leq y \leq 6\}$	20 $\iint_D \frac{2x}{y} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq e\}$
21 $\iint_D 6x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 2\}$	22 $\iint_D (3x^2 y - 4x^3) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2\}$
23 $\iint_D 6x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y)   3 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 2\}$	24 $\iint_D (2xy - 3y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 3; 4 \leq y \leq 6\}$

25	$\iint_D (2x + 3y) dx dy$ $D = \{(x; y)   2 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 2\}$	26	$\iint_D (2x + y) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$
27	$\iint_D (4x - 3y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 2; 2 \leq y \leq 4\}$	28	$\iint_D (3x^2 - 2y) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq x \leq 1; 3 \leq y \leq 4\}$
29	$\iint_D (3y^2 + 2xy) dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq 2; 3 \leq y \leq 5\}$	30	$\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ $D = \{(x; y)   1 \leq x \leq e; 4 \leq y \leq 6\}$

#### Задание 4

1	$\iint_D x dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x^3; x + y = 2; x = 0\}$	2	$\iint_D 9x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y)   xy = 6; x + y - 7 = 0\}$
3	$\iint_D yx^2 dx dy$ $D = \{(x; y)   x^2 + y^2 = 4; x + y - 2 = 0\}$	4	$\iint_D (x + y) dx dy$ $D = \{(x; y)   0 \leq y \leq \pi; 0 \leq x \leq \sin y\}$
5	$\iint_D \sin(x + y) dx dy$ $D = \{(x; y)   x = y; x + y = \frac{\pi}{2}; y = 0\}$	6	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y^2 = x + 2; x + y = 2\}$
7	$\iint_D x dx dy$ $D = \{(x; y)   y = \sqrt{x}; y = x\}$	8	$\iint_D 2y dx dy$ $D = \{(x; y)   y = -x^3; y = 1; x = 0\}$
9	$\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x; xy = 1; y = 2\}$	10	$\iint_D x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y)   y = 2 - x; y = x; x = 0\}$
11	$\iint_D (2x + y) dx dy$ $D = \{(x; y)   x + y = 3; y = 0; x = 0\}$	12	$\iint_D (2y^3 - x) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x + 2; y = 0; x = 0\}$
13	$\iint_D (xy - 4x + 2y - 1) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x^2; y = 0; x = 1\}$	14	$\iint_D (12xy + 9x^2 y) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = \sqrt{x}; y = -x^2; x = 1\}$
15	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4\}$	16	$\iint_D (x + y^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x; y = x^2\}$

17	$\iint_D (3x^2 + y^2 + 1) dx dy$ $D = \{(x; y)   x + y = 2; y = 0; x = 0\}$	18	$\iint_D xy dx dy$ $D = \{(x; y)   y = -x^2 + 2x + 3; y = 0; x = 0\}$
19	$\iint_D (8xy + 18xy^2) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = -\sqrt{x}; y = 2x^2; x = 1\}$	20	$\iint_D (3x^2 y^2 + 4xy) dx dy$ $D = \{(x; y)   y = -\sqrt{x}; y = x^2; x = 1\}$
21	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4\}$	22	$\iint_D 6x dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x^2; y = -x + 2; y = 0\}$
23	$\iint_D 0,75y dx dy$ $D = \{(x; y)   y = \sqrt{x}; y = -x + 6; x = 0\}$	24	$\iint_D 4x dx dy$ $D = \{(x; y)   y = -x + 4;$ $y = x^2 + 2; y = 0; x = 0\}$
25	$\iint_D x dx dy$ $D = \{(x; y)   xy = 6; x + y - 7 = 0\}$	26	$\iint_D xy dx dy$ $D = \{(x; y)   x^2 + y^2 = 4; x + y - 2 = 0\}$
27	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   xy = 4; y = x; x = 4\}$	28	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y^2 = 4 + x; x + 3y = 0\}$
29	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y = x^2 - 2x; y = x\}$	30	$\iint_D dx dy$ $D = \{(x; y)   y = \ln x; x - y = 1; y = -1\}$

**Порядок выполнения задания, методические указания:** - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

**Содержание отчета:** отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

### Контрольные вопросы:

- 1 Что такое несобственный интеграл первого рода?
- 2 В каком случае несобственный интеграл первого рода сходится, а в каком расходится?
- 3 Что такое несобственный интеграл второго рода?
- 4 В каком случае несобственный интеграл второго рода сходится, а в каком расходится?
- 5 Дайте определение двойного интеграла.
- 6 Какими свойствами обладает двойной интеграл?



## 7 Как свести двойной интеграл к повторному?

### **Литература:**

- 1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
- 2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
- 3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
- 4 <http://works.tarefer.ru>
- 5 <http://festival.1september.ru>