Практическая работа 1
Расчет количества выборок

Цель работы: закрепить навыки определения количества выборок с использованием правил и основных формул комбинаторики.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Правило суммы. Если элемент x можно выбрать n способами и если элемент y можно выбрать m способами, то выбор «либо x, либо y» можно осуществить n+m способами.

2 Правило произведения. Если элемент x можно выбрать n способами, и если после его выбора элемент y можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары можно осуществить nm способами.

3 Для любых конечных множеств A и B справедлива формула $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Для любых конечных множеств A, B и C справедлива формула $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Эту формулу можно обобщить на объединение любого конечного числа множеств.

4 Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из n элементов. Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

5 Число размещений без повторений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

6 Число размещений с повторениями из n элементов по m задается равенством $\tilde{A}_n^m = n^m$.

7 Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов. Перестановки отличаются друг от друга порядком элементов.

8 Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$

9 Пусть дано множество из n элементов, в котором n_1 элементов принадлежит к первому типу, n_2- ко второму типу и т.д. до n_k объектов $k^{\underline{го}}$

типа, причем элементы одного и того же типа не различимы между собой. Тогда общее число перестановок данного множества n элементов равно:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

10 Сочетанием из n элементов по m называется любой неупорядоченный набор изm различных элементов, выбранных из n элементов. Сочетания могут отличаться друг от друга только элементами, но не порядком.

11 Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

12 Сочетаниями из n элементов по m с повторениями называются неупорядоченные выборки из n предметов по m с возвращениями. Число сочетаний из n элементов по m с повторениями равно

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример выполнения:

Задание 1

Исходные данные: $A_x^2 = 42$

Решение:

– В левой части уравнения находится размещение, распишем его по формуле, получим $\frac{x!}{(x-2)!} = 42$

– Сократим дробь с факториалами: $(x-1)x = 42$

– Раскроем скобки, перенесем все в левую часть уравнения: $x^2 - x - 42 = 0 \quad D = 1 + 168 = 169 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}; \quad x_1 = 7; \quad x_2 = -6; \quad ОДЗ: \quad x \geq 2$

Ответ: $x = 7$

Задание 2

Исходные данные:

а) В городе имеется 4 театра, 6 кинотеатров с различными фильмами. Сколько способов интересно и с пользой провести вечер?

Решение:

В один вечер можно посмотреть один спектакль или кинофильм, значит сходить можно в театр или кинотеатр, следовательно надо использовать правило сложения:

$$N = N(T) + N(K) = 4 + 6 = 10$$

б) В городе имеется 4 театра и 5 кафе вблизи этих театров. Сколько способов интересно провести вечер, если после спектакля посидеть в кафе?

Решение:

После спектакля в любом из театров можно перекусить в одном из 5 кафе, значит сходить можно в театр и кафе, значит надо использовать правило умножения:

$$N = N(T) \cdot N(K) = 4 \cdot 5 = 20$$

в) в группе молодежи провели исследование, в котором выяснилось, что музыкой увлекаются 15 человек, футболом – 25, компьютером – 40. Из них музыкой и футболом увлекаются 4 человека, футболом и компьютером – 17, а музыкой и компьютером 12. Кроме того все три увлечения у троих человек. Сколько было тестируемых в группе?

Решение:

Т.к. в группе есть люди, увлекающиеся чем-то одним, а также такие, в увлечения которых входят несколько занятий, значит необходимо использовать формулу включения и исключения:

$$N = N(M) + N(F) + N(K) - N(M \cap F) - N(M \cap K) - N(K \cap F) + N(M \cap F \cap K)) =$$
$$= 15 + 25 + 40 - 4 - 17 - 12 + 3 = 50$$

Задание 3

Исходные данные:

Сколько различных четырехбуквенных слов, в которых буквы не повторяются, можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

Решение:

– В слове «комбинаторика» 13 букв, среди них буквы «о», «к», «и», «а» повторяются по два раза, значит используем только 9 букв;

– из этих 9 букв используем только 4;

– порядок следования букв имеет значение, т.к. если в слове переставить буквы, получим другое слово;

– в полученных словах буквы не повторяются.

Значит необходима формула размещений без повторений: $N = A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$

Задание 4

Исходные данные:

Найти число способов, которыми можно в строчку написать *n* нулей и *k* единиц. (n = 5, k = 8)

Решение:

– для вычисления количества способов расстановки 0 и 1 выбираем все цифры, значит используем формулу перестановок;

– всего цифр 13, среди которых повторяются 1 и 0, значит перестановки с повторениями:

$$N = P(5,8) = \frac{13!}{5!8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 9\cdot 11\cdot 13 = 1287$$

Задания к практической работе.

Задание 1

Решить уравнение:

1 $A_x^3 = 56x.$

2 $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$

3 $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$

4 $C_x^2 = 153$

5 $A_x^{x-3} = xP_{x-2}.$

6 $6C_x^{x-3} = 11A_{x-1}^2$

7 $A_x^4 P_{x-4} = 42\,P_{x-2}$

8 $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$

9 $30x = A_x^3$

10 $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$

11 $A_{3x}^4 = 15A_{2x}^3$

12 $\frac{12}{7}C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$

13 $5C_x^3 = C_{x+2}^4$

14 $A_x^5 = 18\,A_{x-2}^4$

15 $\frac{A_{x+2}^{n+2}P_{x-n}}{P_x} = 110$

16 $C_{x-3}^2 = 21$

17 $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$

18 $C_{x+1}^5 = \frac{A_x^3}{8}$

19 $P_{x+2}=132\,A_x^к\,P_{x-к}$

20 $C_x^2 = 153$

21 $C_{x-3}^2 = 21$

22 $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 42$

23 $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$

24 $15C_{x+1}^{x-4} = 7A_{x+1}^3$

25 $30x = A_x^3$

26 $A_x^3 = \frac{1}{20}A_x^4$

27 $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$

28 $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$

29 $\frac{12}{7}C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$

30 $A_x^3 = \frac{1}{20}A_x^4$

31 $C_{3x+1}^{3x-1} = 120$

32 $A_{x+1}^{x-2} = A_x^{x-1}$

33 $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$

34 $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$

35 $5C_x^3 = C_{x+2}^4$

36 $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$

37 $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$

38 $30x = A_x^3$

Задание 2

1 В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причём каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

2 Цех по изготовлению головных уборов начал выпуск трех новых моделей, для которых был закуплен фетр четырех цветов. Сколько видов разных шляп может изготовить цех?

3 В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

4 В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

5 В классе 30 человек, каждый из которых изучает иностранный язык. 20 человек изучает английский, 15 – французский и 10 – немецкий. При этом в группах изучающих по два языка насчитывается по 8 человек. Сколько человек изучает все три языка?

6 Идя на соревнования спортсмен надевает либо майку, либо футболку. Сколько вариантов выбора у него имеется, если постирано 3 майки и 4 футболки?

7 Сколькими способами можно выбрать две буквы: гласную и согласную из слова «здание»?

8 Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

9 В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

10 В корзине лежат 6 яблок и 12 груш. Сколько способов взять любой плод?

11 Сколькими способами можно выбрать две буквы: гласную и согласную из слова «камзол»?

12 Всего в группе 45 студентов. Из них в футбольной секции состоят 25 человек, в баскетбольной – 30, в шахматной – 28. 16 студентов участвуют в футбольной и баскетбольной секции, 18 – в футбольной и шахматной, и 17 – в баскетбольной и шахматной. Сколько студентов участвуют во всех трех секциях?

13 Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться - каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?

14 50 студентов второго курса изучают английский язык, 40 студентов – французский язык, 30 студентов – немецкий язык, 15 человек – английский и французский, 20 человек – английский и немецкий, 10 – французский и немецкий, 5 – все три языка. Определить число студентов, изучающих хотя бы один из этих языков.

15 Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего *нужно* выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

16 В корзине лежат 6 разных яблок и 12 груш. Сколько способов взять яблоко и грушу?

17 Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Сколько человек опросили?

18 Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

19 Перед нами 10 закрытых замков и 10 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Возьмем один из замков, назовем его первым и попробуем открыть его каждым из 10 ключей. В лучшем случае он откроется первым же ключом, а в худшем - только десятым. Сколько нужно в худшем случае произвести проб, чтобы открыть все замки?

20 В студенческой группе 8 девушек и 12 юношей. Сколькими способами можно выбрать из группы для выполнения различных заданий двух человек одного пола?

21 В ящике лежат 5 помидоров и 4 огурца и 6 сладких перцев. Сколько способов приготовить салат, если для него нужно по одному овощу?

22 Группа студентов проходила производственную практику в Египте и Румынии. Половина студентов проходила практику в Египте. В обеих странах учились 13 студентов, 36 студентов — в Румынии. Сколько студентов в группе, если все прошли практику?

23 Сколько способов выбрать гласную и согласную буквы слова «Институт»?

24 В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

25 Сколькими способами можно выбрать две буквы: гласную и согласную из слова «конверт»?

26 В студенческой группе 8 девушек и 12 юношей. Сколькими способами можно выбрать из группы для выполнения различных заданий двух человек разного пола?

27 В каждой комнате особняка стояли букеты цветов. Всего было 30 букетов роз, 20 — гвоздик и 10 — хризантем, причём в каждой комнате стоял хотя бы один букет. При этом ровно в двух комнатах стояли одновременно и хризантемы, и гвоздики, ровно в трёх комнатах — и хризантемы, и розы, ровно в четырёх комнатах — и гвоздики, и розы. Могло ли в особняке быть 55 комнат?

28 Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолёте. Среди летавших на самолёте 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 ещё и летали на самолёте. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врёт ли управдом?

29 При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира, 20 – на пост инженера и 25 на пост космонавта. Сколько способов сформировать экипаж корабля?

30 Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

31 Сколько способов выбрать гласную и согласную буквы слова «Перевертыш»?

32 В студенческой группе 12 девушек и 10 юношей. Сколькими способами можно выбрать из группы для выполнения различных заданий двух человек разного пола?

33 Группа студентов проходила производственную практику в Турции и Израиле. Половина студентов проходила практику в Турции. В обеих странах учились 11 студентов, 27 студентов — в Израиле. Сколько студентов в группе, если все прошли практику?

34 В корзине лежат 6 разных яблок и 7 груш. Сколько способов взять яблоко и грушу?

35 Сколько способов выбрать гласную и согласную буквы слова «Переадресация»?

36 Множество A состоит из сюръективных и инъективных отображений, 12 из которых сюръективные. Мощность A = 34. Сколько инъективных отображений в этом множестве, если известно, что их в 3 раза больше чем биективных?

37 У Пети есть 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, достал из кармана 1 монету номиналом 1 рубль и еще 1 монету номиналом 10 рублей, чтобы купить конфету за 11 рублей у бабули в подземном переходе. Сколькими способами он может выбрать эти монеты?

38 Сколько существует двузначных чисел?

Задание 3

1 На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?

2 Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов, если один из цветов должен быть красным?

3 В корзине лежат 9 черных шаров и 7 красных. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?

4 Из состава конференции, па которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, еслич лены президиума не могут войти в состав делегации?

5 Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

6 Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

7 Для участия в соревнованиях необходимо составить команду из 6 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 9 спортсменов?

8 Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

9 Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов?

10 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «метаматематика»?

11 В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

12 В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

13 Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

14 Из состава конференции, па которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации?

15 Из 7 человек надо выбрать 5 человек и разместить их на пяти занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

16 Для участия в первенстве университета по легкой атлетике необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 7 бегунов?

17 Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

18 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»?

19 Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

20 В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

21 Сколькими способами можно разместить на странице 5 различных заметок?

22 Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?

23 Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и четные?

24 Из 9 человек надо выбрать 6 человек и разместить их на шести занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

25 Сколькими способами можно поставить в ряд 3 красных, 4 синих и 5 зеленых кубиков?

26 Сколькими способами можно выбрать четыре детали из ящика, содержащего 10 деталей?

27 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «колокол»?

28 Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

29 Сколькими способами можно выбрать три игрушки из ящика, содержащего 10 игрушек?

30 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «водород»?

31 Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с полосами одинаковой ширины, если имеется материя 5 различных цветов, если один из цветов должен быть белым?

32 Сколькими способами читатель библиотеки может выбрать две книги из семи имеющихся по предмету?

33 Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры сотен, десятков и единиц различные и четные?

34 В корзине лежат 8 лимонов и 7 апельсинов. Мальчик достает 2 одинаковых фрукта. Сколькими способами он может это сделать?

35 В классе десять предметов и шесть уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

36 В группе из 20 студентов, среди которых 3 отличника, надо выбрать 6 человек для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих шестерых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

37 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «алгоритмизация»?

38 Из 8 человек надо выбрать 5 человек и разместить их на пяти занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

Задание 4

Найти число способов, которыми можно в строчку написать n нулей и k единиц.

№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k		№	n	k
1	9	6		**6**	13	4		**11**	11	3		**16**	11	2		**21**	14	3		**26**	7	5
2	10	3		**7**	7	3		**12**	13	3		**17**	11	5		**22**	11	4		**27**	9	7
3	11	6		**8**	10	4		**13**	10	6		**18**	14	4		**23**	10	8		**28**	8	5
4	10	5		**9**	13	5		**14**	12	5		**19**	12	6		**24**	9	3		**29**	7	4
5	12	4		**10**	7	6		**15**	14	2		**20**	12	3		**25**	8	4		**30**	6	3

31	10	6		**32**	11	6		**33**	12	7		**34**	5	11		**35**	6	9		**36**	7	12
37	11	8		**38**	9	8																

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Дополнительные задания: могут быть сформулированы по ходу занятия

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные понятия, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 В чем заключается правило суммы?

2 Правило произведения

3 Формула включения и исключения для двух множеств

4 Формула включения и исключения для трех множеств

5 Что такое размещения?

6 Формула вычисления числа размещений без повторений

7 Формула вычисления числа размещений с повторениями

8 Что такое перестановки?

9 Формула вычисления числа перестановок без повторений

10 Формула вычисления числа перестановок с повторениями

11 Что такое сочетания?

12 Формула вычисления числа сочетаний без повторений

13 Формула вычисления числа сочетаний с повторениями

14 Схема решения комбинаторных задач.

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2
2 В.П. Омельченко Математика, 2012, Ростов-на-Дону, Феникс
3 http://wiki.kgpi.ru
4 http://rudocs.exdat.com
5 http://gendocs.ru