Практическая работа № 9

Первичная обработка статистических данных.

Построение эмпирической функции распределения

Цель работы: научиться обрабатывать экспериментальные данные, строить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, полигон и гистограмму ряда, определять его характеристики.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: Компьютерные программы не используются

Основные понятия.

1 Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка.

2 Выборочной совокупностью или выборкой называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

3 Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, $x_к$ наблюдалось $n_к$ раз. Тогда наблюдаемые значения x_i называется вариантами, а n_i– частотами, $n = \sum n_i$ называется объемом выборки, а $w_i = \frac{n_i}{n}$ относительной частотой. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется вариационным рядом.

4 Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Если статистическое распределение задано в виде последовательности интервалов, то в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал.

5 Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события, меньшего x.

6 Полигоном частот (относительных частот) называется ломаная, соединяющая точки, координаты которых варианты и их частоты (относительные частоты).

7 Гистограммой частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых – частичные интервалы, длинною h и высотою $\frac{n_i}{h}$ $\left(\frac{w_i}{h}\right)$.

8 Мода (Мо) - это варианта, которая чаще всего встречается в изучаемой совокупности

9 Медианой Ме называют такое значение признака, которое приходится на середину ранжированного ряда и делит его на две равные по числу единиц части. Таким образом, в ранжированном ряду распределения одна половина ряда имеет значения признака, превышающие медиану, другая - меньше медианы. В дискретном ряду, состоящем из четного числа единиц совокупности, медиана определяется как средняя из серединных вариант

10 Вариационный размах R (или размах вариации) - это разница между максимальным и минимальным значениями признака

11 Выборочной средней называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения признака выборки различны, то $\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{n}$, если же все значения имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то $\overline{x_B} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n}$

12 Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения. Если все значения признака выборки различны, то $\overline{D_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}$, если же все значения имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то $\overline{D_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}$

13 Выборочным средним квадратическим отклоненим называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\overline{\sigma_B} = \sqrt{\overline{D_B}}$

14 Средним абсолютным отклонением θ называется средняя арифметическая величина из абсолютных величин отклонений всех вариантов от их средней $\Theta = \frac{\sum\left|x_i - \overline{x_B}\right| n_i}{n}$

15 Коэффициентом вариации V называется отношение среднего квадратического отклонения к средней величине, выраженное в процентах. $V = \frac{\overline{\sigma_B}}{\overline{x_B}} \cdot 100\%$

Задание

В эксперименте наблюдалась случайная величина X. Соответствующие выборочные значения даны. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и ее график, полигон частот и относительных частот,

гистограмму с заданным частичным интервалом, вычислить основные характеристики выборки.

Пример выполнения:

Исходные данные:

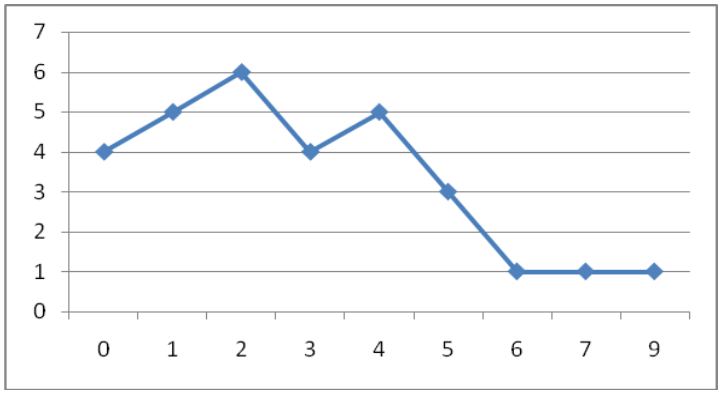
(1 2 5 3 0 1 2 7 5 4 9 2 3 6 4 5 1 0 2 1 4 3 0 3 1 0 4 4 2 2) с частичным интервалом 3.

Порядок выполнения:

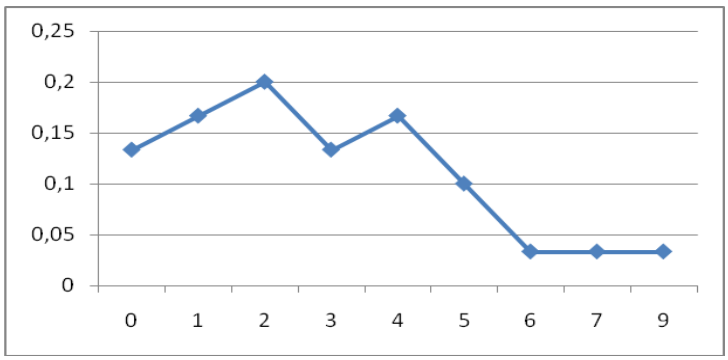
1 Так как не все значения случайной величины различны, найдем частоту каждого значения, относительную частоту (n=30, $w_i = \frac{n_i}{n}$) и составим таблицу вариационного ряда:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	9
n_i	4	5	6	4	5	3	1	1	1
w_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

2 Построим полигон частот – ломаную, соединяющую точки с координатами (x_i;n_i):



3 Построим полигон частот – ломаную, соединяющую точки с координатами (x_i;w_i):

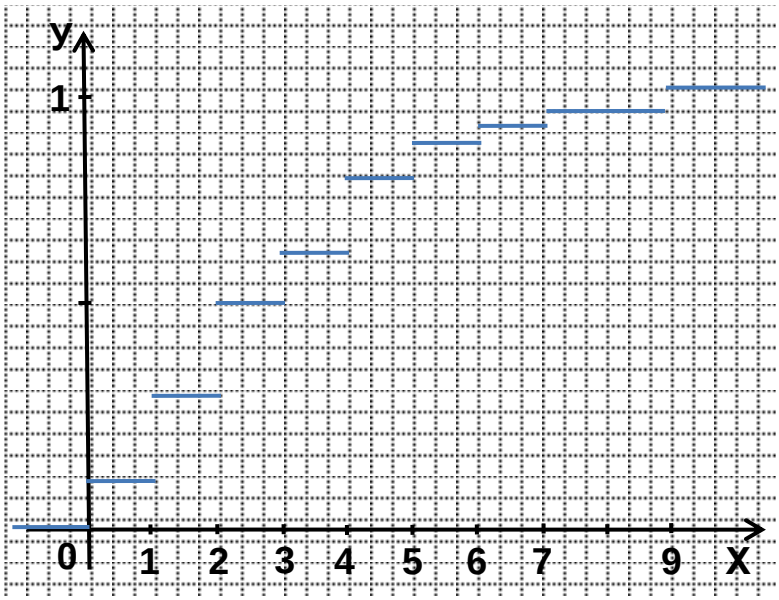


4 Проведем вычисления для построения эмпирической функции распределения:

$x \le 0$	0
$0 < x \le 1$	$F^*(x) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0.133$
$1 < x \le 2$	$F^*(x) = \frac{4+5}{30} = \frac{9}{30} = 0{,}3$
$2 < x \le 3$	$F^*(x) = \frac{4+5+6}{30} = \frac{15}{30} = 0{,}5$
$3 < x \le 4$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4}{30} = \frac{19}{30} \approx 0.633$
$4 < x \le 5$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4+5}{30} = \frac{24}{30} = 0{,}8$
$5 < x \le 6$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4+5+3}{30} = \frac{27}{30} = 0{,}9$
$6 < x \le 7$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4+5+3+1}{30} = \frac{28}{30} \approx 0.933$
$7 < x \le 9$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4+5+3+1+1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0.966$
$x > 9$	$F^*(x) = \frac{4+5+6+4+5+3+1+1+1}{30} = \frac{30}{30} = 1$

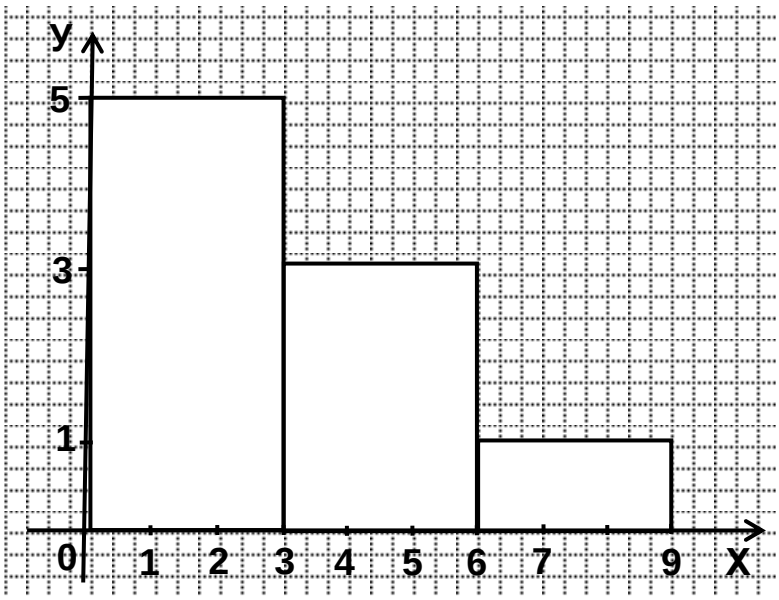
5 Получили эмпирическую функцию распределения и ее график:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0 \\ 0{,}133 & при\ 0 < x \le 1 \\ 0{,}3 & при\ 1 < x \le 2 \\ 0{,}5 & при\ 2 < x \le 3 \\ 0{,}633 & при\ 3 < x \le 4 \\ 0{,}8 & при\ 4 < x \le 5 \\ 0{,}9 & при\ 5 < x \le 6 \\ 0{,}933 & при\ 6 < x \le 7 \\ 0{,}966 & при\ 7 < x \le 9 \\ 1 & при\ x > 9 \end{cases}$$



6 Построим гистограмму, для этого разобьем все значения случайной величины на интервалы, размером 3, получим

Относительный интервал	Сумма частот	Высота прямоугольника
0 – 3	15	5
3 – 6	12	4
6 – 9	3	1



7 Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{0\cdot 4+1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 3+6\cdot 1+7\cdot 1+9\cdot 1}{30} = \frac{86}{30} \approx 2{,}87$$

8 Выборочную дисперсию:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{0\cdot 4+1\cdot 5+4\cdot 6+9\cdot 4+16\cdot 5+25\cdot 3+36\cdot 1+49\cdot 1+81\cdot 1}{30} = \frac{386}{30} \approx 12{,}87$$

$$D_B = \overline{x^2} - \overline{x_B}^2 = 12{,}87 - 2{,}87^2 \approx 12{,}87 - 8{,}24 = 4{,}63$$

9 Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 2{,}15$

10 Моду $M_o = 2$

11 Медиану $m_e = 4$

12 Размах варьирования $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 0 = 9$

13 Среднее абсолютное отклонение

$$\Theta = \frac{\sum \left| x_i - \overline{x_B} \right| n_i}{n} = \frac{2{,}87\cdot 4+1.87\cdot 5+0{,}87\cdot 6+0{,}13\cdot 4+1{,}13\cdot 5+2{,}13\cdot 3+3{,}13\cdot 1+4{,}13\cdot 1+6{,}13\cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{52{,}51}{30} = 1{,}75$$

14 Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma_B}{\overline{x_B}} \cdot 100\% = \frac{2{,}15}{2{,}87} \cdot 100\% = 75$

Задания к практической работе.

1 (0,01 0,01 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,25 0,29 0,42 0,42 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

2 (1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,32 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,52 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 2,50) с частичным интервалом 0,37.

3 (3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,15 4,15 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,31 4,31 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,26 5,53 6,03 6,03) с частичным интервалом 0,46.

4 (1,50 1,52 1,52 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,15 4,15 4,20) с частичным интервалом 0,54.

5 (0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,32 1,34 1,39) с частичным интервалом 0,23.

6 (0,01 0,04 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,29 0,29 0,42 0,46 0,46 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,87 0,93) с частичным интервалом 0,23.

7 (1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,35 2,46 2,50 2,50) с частичным интервалом 0,37.

8 (3,73 3,77 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,15 4,15 4,15 4,23 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,31 4,31 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,53 5,53 6,03 6,03) с частичным интервалом 0,46.

9 (1,50 1,52 1,52 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,15 4,20 4,20) с частичным интервалом 0,54.

10 (0,47 0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,32 1,32 1,34 1,39 с частичным интервалом 0,23.

11 (0,01 0,01 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,29 0,29 0,29 0,42 0,42 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

12 (1,02 1,03 1,03 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,34 1,34 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,52 1,54 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,46 2,50 с частичным интервалом 0,37.

13 (3,73 3,77 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 4,07 4,07 4,07 4,15 4,15 4,15 4,15 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,31 4,31 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,26 5,53 5,53 6,03) с частичным интервалом 0,46.

14 (1,50 1,50 1,50 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,46 2,46 2,46 2,50 3,73 3,77 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,20 4,20 4,20) с частичным интервалом 0,54.

15 (0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 1,02 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,03 1,03 1,05 1,32 1,32 1,34 1,34 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

16 (0,01 0,01 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,42 0,42 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

17 (1,02 1,03 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,50 2,50 2,50) с частичным интервалом 0,37.

18 (3,73 3,73 3,73 3,73 3,77 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,15 4,15 4,15 4,23 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,34 4,34 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,53 5,53 6,03 6,03) с частичным интервалом 0,46.

19 (1,50 1,50 1,50 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,46 2,46 2,46 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,15 4,20 4,20 4,20) с частичным интервалом 0,54.

20 (0,47 0,47 0,47 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,34 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

21 (0,47 0,47 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,03 1,03 1,03 1,03 1,05 1,32 1,32 1,34 1,34 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

22 (0,01 0,04 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,46 0,46 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,87 0,93) с частичным интервалом 0,23.

23 (1,02 1,02 1,02 1,03 1,05 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,35 2,46 2,46 2,50) с частичным интервалом 0,37.

24 (3,73 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,07 4,15 4,15 4,23 4,23 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,34 4,34 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,53 5,53 6,03 6,03) с частичным интервалом 0,46.

25 (1,50 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,46 2,46 2,46 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,15 4,15 4,15 4,20) с частичным интервалом 0,54.

26 (0,47 0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 0,93 1,02 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,34 1,34 1,34 1,34 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

27 (0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,34 1,34 1,34 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

28 (0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93 1,02 1,02 1,02 1,03 1,03 1,03 1,05 1,32 1,32 1,34 1,39 1,39 1,39) с частичным интервалом 0,23.

29 (0,01 0,04 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,46 0,46 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,70 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

30 (1,02 1,03 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,35 2,46 2,50 2,50) с частичным интервалом 0,37.

31 (0,01 0,04 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,29 0,29 0,42 0,42 0,42 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,78 0,85 0,87 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

32 (0,01 0,04 0,04 0,17 0,17 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,46 0,46 0,47 0,47 0,59 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,72 0,78 0,83 0,87 0,87 0,87 0,93) с частичным интервалом 0,23.

33 (3,73 3,73 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,17 4,17 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,31 4,31 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,26 5,53 5,53 6,03) с частичным интервалом 0,46.

34 (1,50 1,52 1,52 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,35 2,46 2,46 2,50 2,50 3,50 3,50 3,77 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,07 4,15 4,20 4,20) с частичным интервалом 0,54.

35 (1,50 1,50 1,52 1,54 1,59 1,59 1,59 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,46 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,07 4,07 4,15 4,15 4,20) с частичным интервалом 0,54.

36 (0,01 0,01 0,04 0,18 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,42 0,46 0,46 0,46 0,47 0,59 0,59 0,68 0,68 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,85 0,93 0,93) с частичным интервалом 0,23.

37 (1,02 1,02 1,02 1,03 1,05 1,05 1,05 1,24 1,32 1,32 1,32 1,32 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 1,90 2,10 2,35 2,35 2,46 2,46 2,50) с частичным интервалом 0,37.

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 Что такое генеральная совокупность?
2 Что такое выборочная совокупность?
3 Что такое вариационный ряд?
4 Статистическое распределение выборки
5 Эмпирическая функция распределения
6 Чем отличаются полигон и гистограмма частот?
7 Что такое мода?
8 Что такое медиана?
9 Что такое вариационный размах?
10 Что такое выборочная средняя?
11 Что такое выборочная дисперсия?
12 Что такое выборочное среднее квадратическое отклонение?
13 Что такое среднее абсолютное отклонение?
14 Что такое коэффициент вариации?

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1

2 П.Е. Данко и др. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 частях, часть 1 2008, -М, Мир и образование, Астрель, ОНИКС

3 В.П. Омельченко Математика, 2012, Ростов-на-Дону, Феникс

4 http://www.coolreferat.com

5 http://matica.org.ua/

6 http://www.exponenta.ru/

7 http://matem96.ru/primer/primer_terver3.shtml

8 http://www.matburo.ru