Практическая работа 12
Использование метода математической индукции для доказательства утверждений

Цель работы: научиться использовать метод математической индукции для доказательства утверждений

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы.

Основные понятия.

Схема-алгоритм метода математической индукции:

1 Проверить справедливость доказываемой формулы для начального значения n (это может быть 0 , 1 , 2 , . . .) .

2 Предположить, что формула справедлива при $n = k.$

3 Доказать, что формула справедлива и при $n = k + 1.$

Задания

1 Доказать равенства

2 Доказать неравенства

3 Доказать утверждения

Пример выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

Доказать равенство: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \quad (n \ge 1).$

Решение:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \quad (n \ge 1).$$

а) проверим справедливость утверждения для n = 1: $1^3 = (1)^2;$

б) предположим истинность для n = k: $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2;$

в) докажем для n = k + 1: $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 =$

$=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+k^3+3k^2+3k+1=(1+2+\cdots+k)^2+k^2+2k+1+$
$+k^3+2k^2+k=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^2+k(k+1)(k+1)=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^2+$
$+2(1+...+k)(k+1)=(1+2+...+k+k+1)^2$
$k(k+1)=2(1+2+\cdots+k)$. доказывается с помощью метода мат.индукции

Задание 2

Исходные данные:

Доказать неравенство: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $(n\geq 1)$.

Решение:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

а) проверим справедливость утверждения для n = 1: $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$; т.к. $2>\sqrt{3}$;

б) предположим истинность для n = k: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

в) докажем для n = k + 1: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k+2-1}{2k+2}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}=\frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}<\frac{\sqrt{4k^2+8k+4}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}=\frac{\sqrt{(2k+2)^2}}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}=\frac{2k+2}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$

Получили $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

2 $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$

4 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n^3}{2n+1}$

5 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

6 $1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)$

7 $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

8 $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$

9 $\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{6}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{n+3}{n(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$

10 $1+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, где $x\neq 1$

11 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1$

12 $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

13 $\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}=\frac{3n(n+1)}{2\left(n^2+n+1\right)}$, где $n\geq 2$

14 $1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$

15 $2+7+14+\ldots+\left(n^2+2n-1\right)=\frac{n\left(2n^2+9n+1\right)}{6}$

16 Произведение $P=(1+2)(3+4+5)(6+7+8+9)\cdot\ldots$, состоящее из n сомножителей, равно

$\frac{(n!)^3(n+1)^2(n+2)}{2^{n+1}}$

17 $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

18 $1\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

19 $1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

20 $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$

21 $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

22 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$

23 $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

24 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

25 $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

26 $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\dfrac{1}{6}n(2n^2+9n+1)$

27 $1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$

28 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$

29 $1+4+9+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

30 $1\cdot3+2\cdot5+\ldots+n\cdot(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

Задание 2

1 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ для всех натуральных $n\geq2$

2 $(1+x)^n>1+nx$, если n > 2 и x > 0

3 $3^n>n\cdot2^{n+1}$ при n > 6

4 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<1{,}7-\dfrac{1}{n}$ при n > 2

5 $2^{n-1}\cdot n!\leq n^n$

6 $(1+a+a^2)^m>1+ma+\dfrac{m(m+1)}{2}a^2$ при a > 0,6

7 $2!\cdot4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n$ при n > 1

8 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ при n ≥ 2

9 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n}, \quad n\in N$

10 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ при любом натуральном n > 1

11 $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ для любого натурального n > 1

12 $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, где $\alpha>-1,\ \alpha\neq 0$, n – натуральное число, большее 1

13 $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, где $a+b>0,\ a\neq b$, n – натуральное число, большее 1

14 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}<2$ при n ≥ 1

15 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2{,}5-\frac{1}{n}$ для всех натуральных $n\geq 2$

16 $(1+x+x^2)^m>1+mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2$ при x > 1

17 $2^{n-1}(x^n+y^n)>(x+y)^n$, где $x+y>0,\ x\neq y$, n > 1

18 $(1+x)^n>1+nx$, где x > – 1, $x\neq 0$, n > 1

19 $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ для n > 1

20 $2!\cdot 4!\cdot ...\cdot (2n)!>[(n+1)!]^n$ для всех натуральных n > 1

21 $3^n>n\cdot 2^{n+1}$ при n > 6

22 $(1+t)^n>1+nt$, если n > 2 и t > 0

23 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}<2$ для всех натуральных n ≥ 1

24 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ при n > 1

25 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n}, \quad n\in N$

26 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ при n ≥ 2

27 $2^{n-1}\cdot n!\leq n^n$

28 $3^n > n \cdot 2^{n+1}$ при n > 6

29 $(1+t)^n > 1+nt$, если n > 2 и t > 0

30 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n} < 2$ для всех натуральных n ≥ 1

Задание 3

1 Если n – натуральное число, то число $(n^2 – n)$ четное.

2 $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6,

3 $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

4 11^{2n} -1 при произвольном натуральном n делится на 6 без остатка.

5 $(11^{n+2} +12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.

6 При любом n 7n – 1 делится на 6 без остатка

7 $3^{3n-1} +2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11

8 3^{3n+3} - 26n - 27 при произвольном натуральном n делится на 26^2 (676) без остатка.

9 $5 \cdot 2^{3n-2} +3^{3n-1}$ кратно 19, n – натуральное число

10 7^n + 12n + 17 кратно 18

11 $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ делится на 17, n – натуральное число

12 3^{2n+2} + 8n – 9 делится на 16, n – натуральное число

13 4^n + 15n – 1 кратно 9

14 Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9

15 11^{2n} -1 при произвольном натуральном n делится на 6 без остатка

16 $5 \cdot 2^{3n-2} +3^{3n-1}$ кратно 19, n – натуральное число

17 7^n + 12n + 17 кратно 18

18 $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ делится на 17, n – натуральное число

19 3^{2n+2} + 8n – 9 делится на 16, n – натуральное число

20 Если n – натуральное число, то число $(n^2 – n)$ четное.

21 $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6,

22 $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

23 11^{2n} -1 при произвольном натуральном n делится на 6 без остатка.

24 $(11^{n+2} +12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.

25 При любом n 7^n – 1 делится на 6 без остатка

26 $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19, n – натуральное число

27 $7^n + 12n + 17$ кратно 18

28 $3^{3n-1} + 2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11

29 $3^{3n+3} - 26n - 27$ при произвольном натуральном n делится на 26^2 (676) без остатка.

30 Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные понятия, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

Контрольные вопросы:

1 В чем суть метода математической индукции?

2 Из каких этапов состоит доказательство методом математической индукции?

3 Для каких задач можно использовать метод?

Литература:

1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова . - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.

2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.

3 Хаггарти Р**.** Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.

4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.

5 http://habrahabr.ru

6 http://cyberfac.ru

7 http://www.matburo.ru

8 http://www.toehelp.ru