

Практическая работа 13

Навешивание кванторов на предикаты, построение отрицаний к предикатам

Цель работы: научиться навешивать кванторы на предикаты и определять логические значения этих высказываний

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы.

Основные понятия.

1 Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание. В предикатах переменные могут присутствовать явно или неявно, т.е. подразумеваться по смыслу.

2 Областью определения предиката называется множество, элементы которого могут быть подставлены в предикат.

3 Множеством истинности предиката вызывается множество, элементы которого подставленные в предикат, обращают его в истинное высказывание.

4 Предикаты могут быть простыми и составными. Составные предикаты образуются из простых предикатов с помощью логических связей по правилам алгебры логики.

5 Из двух предикатов можно образовать новый предикат, который часто называется высказывательной формой.

6 Одноместный предикат принято называть свойством (предикат – свойство).

7 Двуместный, трехместный, ... , n-местный предикат называют отношением (предикат – отношение)

8 Нульместный предикат называется высказыванием.

9 Тождественно – истинным называется предикат, который принимает истинное значение на всей области определения (множество истинности совпадает с областью определения)

10 Тождественно – ложным называется предикат, который принимает ложное значение на всей области определения (множество истинности пустое).

11 Пусть даны два предиката, определенные на одном множестве. Высказывательные формы Q и G назовем равносильными, если при любом наборе значений переменных, входящих в них, высказывательные формы принимают одинаковые значения истинности

12 Отношение равносильности высказывательных форм рефлексивно и симметрично.

13 Квантор — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание

14 Различают два вида кванторов: квантор общности и квантор существования

15 *Квантор общности* — соответствует словам: *любой, всякий, каждый* и иными словам такого смысла. Обозначается символом \forall

16 *Квантор существования* — соответствует словам: *существует, найдется, хотя бы один* и иными словам такого смысла. Обозначается символом \exists

Задания

1 Навесить кванторы \forall и \exists на одноместный предикат P(x) и построить отрицание к предикату.

2 Навесить кванторы \forall и \exists на двуместный предикат P(x, y) и построить отрицание к предикату.

3 Навесить кванторы \forall и \exists на трехместный предикат P(x, y, z) и построить отрицание к предикату.

Пример выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

$$P(x) = \text{"sin } x = 0, x \in R\text{"}$$

Решение

$$\overline{P(x)} = \text{"sin } x \neq 0, x \in R\text{"}$$

$$\forall x P(x) a = \text{"}\forall x \in R \mid \text{sin } x = 0\text{"}; \hat{a} = 0$$

$$\exists x P(x) b = \text{"}\exists x \in R \mid \text{sin } x = 0\text{"}; \hat{b} = 1$$

Задание 2

Исходные данные:

$P(x, y) = "x \text{ делится без остатка на } y, x, y \in R"$

Решение

$\overline{P(x, y)} = "x \text{ не делится без остатка на } y; x, y \in R"$

$\forall x \forall y P(x, y) a = "\forall x \in R, \forall y \in R | x \text{ делится без остатка на } y"; \hat{a} = 0$

$\exists x \exists y P(x, y) c = "\exists x \in R, \exists y \in R | x \text{ делится без остатка на } y"; \hat{c} = 1$

$\forall x \exists y P(x, y) e = "\forall x \in R, \exists y \in R | x \text{ делится без остатка на } y"; \hat{e} = 1$

$\exists x \forall y P(x, y) g = "\exists x \in R, \forall y \in R | x \text{ делится без остатка на } y"; \hat{g} = 1$

Задания к практической работе.

Задание 1

1 $P(x) = \langle x \text{ делится без остатка на } 3, x \in R \rangle$	2 $P(x) = \langle x \leq 3, x \in R \rangle$
3 $P(x) = \langle x^2 = 16, x \in R \rangle$	4 $P(x) = \langle \cos x = 0, x \in R \rangle$
5 $P(x) = \langle \cos x = 1, x \in R \rangle$	6 $P(x) = \langle \sin x = 1, x \in R \rangle$
7 $P(x) = \langle \operatorname{tg} x = 0, x \in R \rangle$	8 $P(x) = \langle \operatorname{tg} x = 1, x \in R \rangle$
9 $P(x) = \langle x^2 > 0, x \in R \rangle$	10 $P(x) = \langle x^2 < 16, x \in R \rangle$
11 $P(x) = \langle x - \text{делитель } 16, x \in R \rangle$	12 $P(x) = \langle x - \text{кратное } 5, x \in R \rangle$
13 $P(x) = \langle x^3 < 0, x \in R \rangle$	14 $P(x) = \langle x^3 > 0, x \in R \rangle$
15 $P(x) = \langle \operatorname{tg} x \text{ не существует, } x \in R \rangle$	16 $P(x) = \langle \cos x \text{ не существует, } x \in R \rangle$
17 $P(x) = \langle \sin x \text{ не существует, } x \in R \rangle$	18 $P(x) = \langle \operatorname{ctg} x \text{ не существует, } x \in R \rangle$
19 $P(x) = \langle e^x > 0, x \in R \rangle$	20 $P(x) = \langle e^x < 0, x \in R \rangle$
21 $P(x) = \langle \ln x > 0, x \in R \rangle$	22 $P(x) = \langle \ln x < 0, x \in R \rangle$
23 $P(x) = \langle \ln x \text{ не существует, } x \in R \rangle$	24 $P(x) = \langle \cos x > 1, x \in R \rangle$
25 $P(x) = \langle \sin x > 1, x \in R \rangle$	26 $P(x) = \langle \operatorname{tg} x > 1, x \in R \rangle$
27 $P(x) = \langle \operatorname{ctg} x > 1, x \in R \rangle$	28 $P(x) = \langle x^4 > 0, x \in R \rangle$
29 $P(x) = \langle x^4 < 0, x \in R \rangle$	30 $P(x) = \langle x^4 \text{ не существует, } x \in R \rangle$

Задание 2

1 $P(x, y) = \langle x < 2y; x, y \in R \rangle$	2 $P(x, y) = \langle x^2 + y^2 = 0; x, y \in R \rangle$
3 $P(x, y) = \langle x^2 + y^2 \geq 0; x, y \in R \rangle$	4 $P(x, y) = \langle 5x^2 + 3y^2 = 0; x, y \in R \rangle$
5 $P(x, y) = \langle \cos^2 x + \sin^2 y = 1; x, y \in R \rangle$	6 $P(x, y) = \langle \sin(x + y) = 1; x, y \in R \rangle$
7 $P(x, y) = \langle \operatorname{tg} x = \sin y; x, y \in R \rangle$	8 $P(x, y) = \langle \operatorname{tg} x = \cos y, x \in R \rangle$

9 $P(x, y) = \langle x^2 - y^2 = 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	10 $P(x, y) = \langle x^2 - y > 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
11 $P(x, y) = \langle x^2 - y < 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	12 $P(x, y) = \langle xy - \text{кратное } 5, x, y \in \mathbb{R} \rangle$
13 $P(x, y) = \langle x^3 - y^3 < 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	14 $P(x, y) = \langle x^3 - y^3 > 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
15 $P(x, y) = \langle x > 2y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	16 $P(x, y) = \langle 3x < 2y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
17 $P(x, y) = \langle 3x > 2y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	18 $P(x, y) = \langle 3x > y^2; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
19 $P(x, y) = \langle \text{ctg } x > y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	20 $P(x, y) = \langle e^x < 3y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
21 $P(x, y) = \langle \ln xy > 0, x, y \in \mathbb{R} \rangle$	22 $P(x, y) = \langle x^4 > y, x, y \in \mathbb{R} \rangle$
23 $P(x, y) = \langle \ln(x+y) \text{ не существует; } x, y \in \mathbb{R} \rangle$	24 $P(x, y) = \langle e^x < y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
25 $P(x, y) = \langle e^x > y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	26 $P(x, y) = \langle \ln x < y, x \in \mathbb{R} \rangle$
27 $P(x, y) = \langle x^{4y} < 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$	28 $P(x, y) = \langle x^{4y} > 0; x, y \in \mathbb{R} \rangle$
29 $P(x, y) = \langle \ln(x+5) < y, x \in \mathbb{R} \rangle$	30 $P(x, y) = \langle x^3 > 4y; x, y \in \mathbb{R} \rangle$

Задание 3

1 $P(x, y, z) = \langle x^2 + y^2 + z^2 \geq 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	2 $P(x, y, z) = \langle x^2 + y^2 = z^2; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
3 $P(x, y, z) = \langle \cos^2 x + \sin^2 y = z; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	4 $P(x, y, z) = \langle 5x^2 + 3y^2 + z^2 = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
5 $P(x, y, z) = \langle xz < 2y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	6 $P(x, y, z) = \langle \sin(x + y + z) = 1; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
7 $P(x, y, z) = \langle x^3 - y^3 - z^3 < 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	8 $P(x, y, z) = \langle xyz - \text{кратное } 5, x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
9 $P(x, y, z) = \langle x^2 - (y + z)^2 = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	10 $P(x, y, z) = \langle x^2 - y - z > 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
11 $P(x, y, z) = \langle \text{tg } x = z \cos y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	12 $P(x, y, z) = \langle x^2 - yz < 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
13 $P(x, y, z) = \langle \text{tg } x = z \sin y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	14 $P(x, y, z) = \langle 3x^2 > 2y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
15 $P(x, y, z) = \langle e^x < 3yz; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	16 $P(x, y, z) = \langle 3x < 2y^2; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
17 $P(x, y, z) = \langle z \ln x < y, x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	18 $P(x, y, z) = \langle 3x > y^{2z}; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
19 $P(x, y, z) = \langle z \text{ctg } x > y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	20 $P(x, y, z) = \langle \ln(x+y+z) \text{ не существует; } x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
21 $P(x, y, z) = \langle e^x > ye^z; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	22 $P(x, y, z) = \langle x^{4y} > z; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
23 $P(x, y, z) = \langle xz > 2y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	24 $P(x, y, z) = \langle e^{xz} < y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
25 $P(x, y, z) = \langle \ln xyz > 0, x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	26 $P(x, y, z) = \langle (xz)^3 - y^3 > 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
27 $P(x, y, z) = \langle x^{4yz} < 0; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	28 $P(x, y, z) = \langle x^4 > yz, x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$
29 $P(x, y, z) = \langle \ln(x+z) < y, x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$	30 $P(x, y, z) = \langle x^{3z} > 4y; x, y, z \in \mathbb{R} \rangle$

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные понятия, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ, вывод по работе

Контрольные вопросы:

- 1 Что такое предикат?
- 2 Множество истинности предиката
- 3 Виды предикатов
- 4 Как получить составной предикат?
- 5 Что такое высказывательная форма?
- 6 Одноместный предикат
- 7 Многоместный предикат
- 8 Нульместный предикат
- 9 Тождественно истинный предикат
- 10 Тождественно ложный предикат
- 11 равносильные предикаты
- 12 Свойства равносильности предикатов
- 13 Что такое квантор?
- 14 Какие бывают кванторы?
- 15 Что такое и как обозначается квантор общности?
- 16 Что такое и как обозначается квантор существования?

Литература:

- 1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова . - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.
- 2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.
- 3 Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. - М. : Техносфера, 2005. - 400 с.
- 4 Осипова В.А. Основы дискретной математики/В.А.Осипова – М.: ФОРУМ: ИНФА-М, 2012. – 160 с.
- 5 <https://ru.wikipedia.org/wiki>
- 6 <http://www.wikiznanie.ru/ru-wz/index.php>
- 7 <http://uchilok.net/matematika/921-kvantory.html>