Практическая работа 6
Решение логических задач с применением законов алгебры логики

1 Цель работы: закрепление умений преобразовывать логические выражения с использованием законов алгебры логики, вычислять их значения и строить логические схемы.

2 Перечень технических средств обучения

2.1 Персональный компьютер
2.2 MicrosoftWindows
2.3 Microsoft Office

3 Теоретические сведения

1 Логика – наука о законах и формах мышления

2 Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно

3 Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

4 Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

5 Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение

6 Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

7 Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

8 Алгебра логики – это наука об общих правилах и законах действий над логическими переменными и высказываниями.

9 Самой простой логической операцией является операция НЕ, по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT ( ). Если А – истинно, то $\bar{A}$ – ложно и наоборот. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента. Логическая операция НЕ является унарной, т.е. действие выполняются над одним операндом. Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

10 Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением, а ИЛИ – дизъюнкцией, или логическим сложением. Операция И

(обозначается «И», «and», «&», A•B) имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Таблица истинности F = A ^ B:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

11 Операция ИЛИ (обозначается «ИЛИ», «or», A+B, A˅B) называется дизъюнкцией или логическим сложением и дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Таблица истинности F = A ˅ B:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

12 Логическое следование: импликация – связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (А), а второе (В) – следствием из этого условия. Результатом импликации является ЛОЖЬ только тогда, когда условие А истинно, а следствие В ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ … , ТО … Таблица истинности F = A → B:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13 Логическая равнозначность: эквивалентность – определяет результат сравнения двух простых логических выражений А и В. Результатом эквивалентности является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности". Таблица истинности F = A ↔ B:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

14 Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении: 1. инверсия → 2. Конъюнкция → 3. Дизъюнкция → 4. Импликация → 5. Эквивалентность

15 **Для изменения указанного порядка** выполнения операций используются круглые скобки.

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

16 Штрих Шеффера, $A|B$ или антиконъюнкция, по определению это отрицание конъюнкции $F = A|B = \overline{A \wedge B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

17 Стрелка Пирса, $A \downarrow B$ или антидизъюнкция, по определению $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$:

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

18 Сумма по модулю два, $A \oplus B$ или антиэквивалентность, по определению $F = A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

19 Основные законы логики :

- A = A – закон тождества
- A & $\overline{A}$ = 0 – закон непротиворечия
- A ∨ $\overline{A}$ = 1 – закон исключенного третьего
- $\overline{\overline{A}}$ = A – закон двойного отрицания
- Свойства констант: $\overline{0}$ = 1 $\overline{1}$ = 0

  A ∨ 0 = A A & 0 = 0

  A ∨ 1 = 1 A & 1 = 1
- Законы идемпотентности: A ∨ A = A; A & A = A
- Законы коммутативности: A ∨ B = B ∨ A; A & B = B & A
- Законы ассоциативности: A ∨ (B∨C) = (A∨B) ∨ C; A & (B&C) = (A&B) & C

- Законы дистрибутивности: A∨(B&C)=(A∨B)&(A∨C); A&(B∨C)=(A&B)∨(A&C)
- Законы поглощения: A ∨ (A & B) = A; A & (A ∨ B) = A
- Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$; $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

20 Схема называется комбинационной, если каждую из ее выходов можно представить как логическую функцию входных переменных, типа И-НЕ, И, ИЛИ, ИЛИ-НЕ и т.д.

21 Графическое изображение комбинационной схемы, при котором показаны связи между различными элементами (вентелями), а сами элементы представлены условными обозначениями, называется функциональной схемой.

4 Задания

Задание 1 Составить таблицу истинности сложного логического выражения по варианту

Задание 2 Для заданной комбинационной схемы построить аналитическое выражение, упростить его с помощью равносильных преобразований и изобразить упрощенную схему, если это возможно.

5 Порядок выполнения:

Примеры выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$.

Решение:

1 $(X \overset{\partial 1}{\to} Y) \overset{\partial 4}{\wedge} (Y \overset{\partial 2}{\to} Z) \overset{\partial 5}{\to} (Z \overset{\partial 3}{\to} X)$.

2 Составим таблицу истинности для исходного выражения:

X	Y	Z	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3 Упростим высказывание:

– преобразуем импликацию:

$(X \to Y)(Y \to Z) \to (Z \to X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X)$;

– воспользуемся законом де Моргана для преобразования инверсии:

$\overline{(\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{(\overline{X} \vee Y)} \vee \overline{(\overline{Y} \vee Z)} \vee (\overline{Z} \vee X) = \overline{\overline{X}}\,\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\,\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X$;

– по закону двойного отрицания:

$\overline{\overline{X}}\,\overline{Y} \vee \overline{\overline{Y}}\,\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X$;

– перегруппируем высказывание и воспользуемся законом поглощения:

$X\overline{Y} \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} \vee X = X\overline{Y} \vee X \vee Y\overline{Z} \vee \overline{Z} = X \vee \overline{Z}$

4 Составим таблицу истинности для полученного выражения:

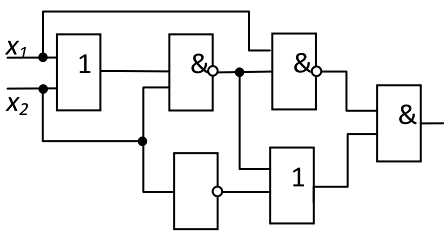
X	Y	Z	$\overline{Z}$	$X \vee \overline{Z}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Результирующие столбцы в двух таблицах совпали, следовательно, выполненные преобразования верны.

Задание 2

Исходные данные:

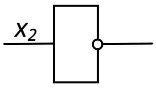
Составить логическое выражение по схеме, упростить его и составить новую схему:



Решение:

1) Следуем по схеме по верхней ветке: $w_1 = \overline{\overline{(x_1 \vee x_2)x_2}\,x_1} = \overline{(\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{x_1})x_1} =$ $= \overline{(\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1})x_1} = \overline{\overline{x_1}x_1} = 1$;
2) теперь по нижней: $w_2 = \overline{(x_1 \vee x_2)x_2} \vee \overline{x_2} = (\overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_2}) \vee \overline{x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2} = \overline{x_2}$;

3) объединим обе ветки: $w = w_1 w_2 = 1 \cdot \overline{x_2} = \overline{x_2}$;

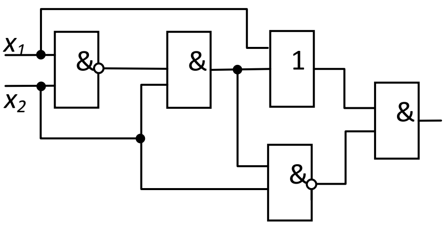
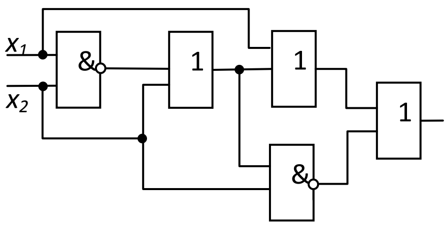
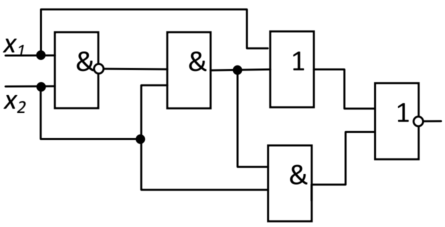
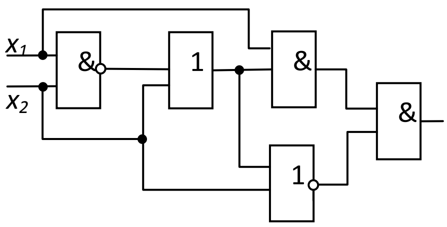
4) получим схему: 

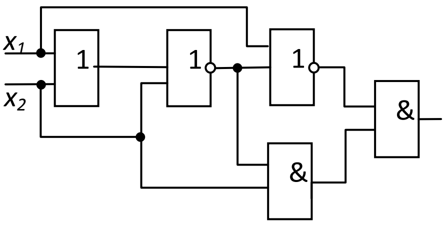
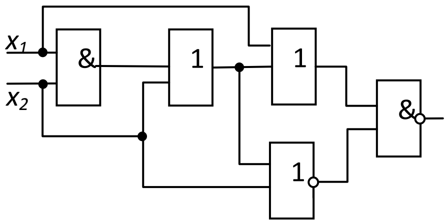
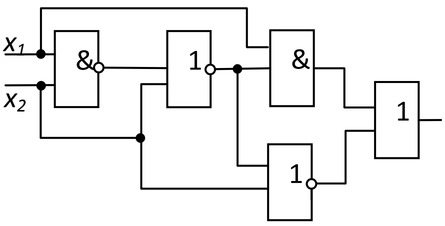
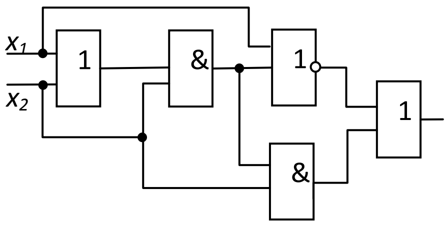
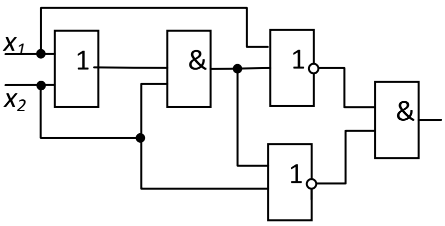
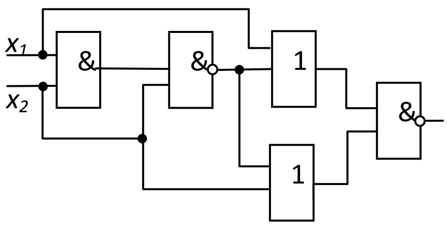
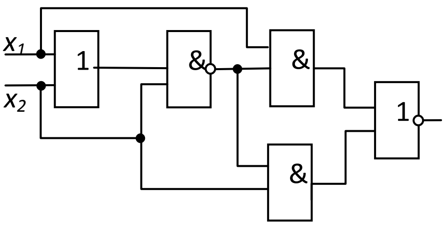
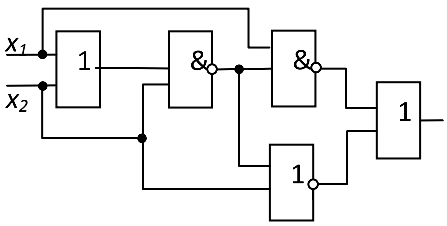
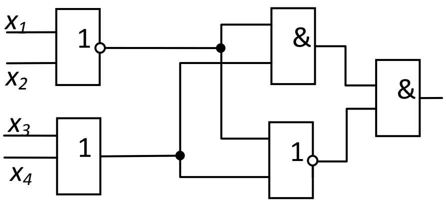
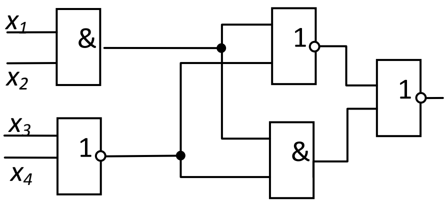
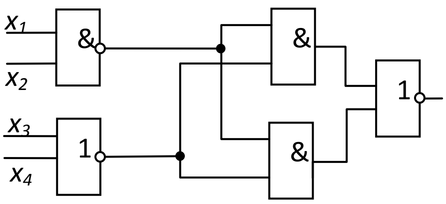
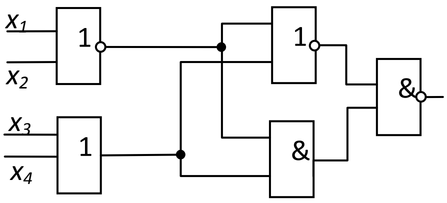
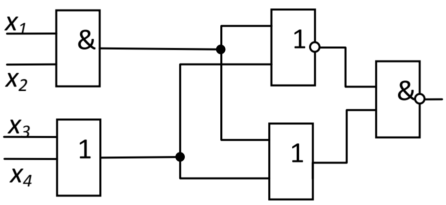
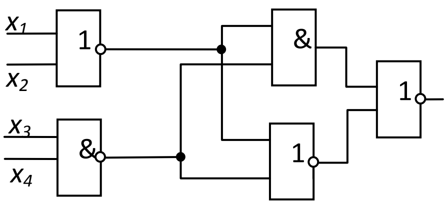
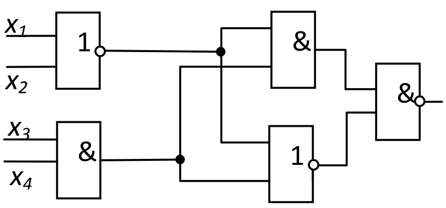
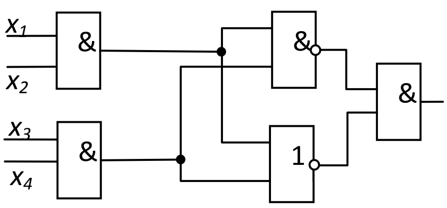
6 Варианты к практической работе:

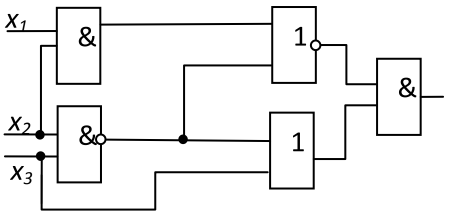
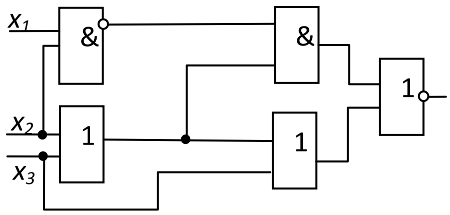
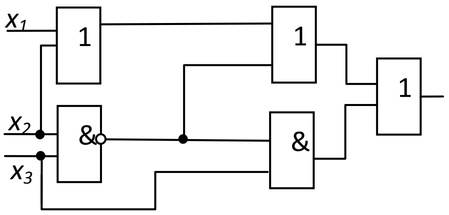
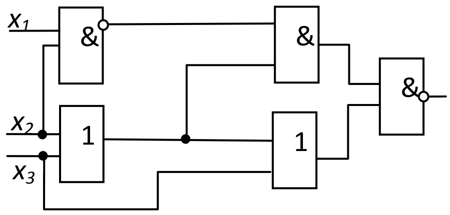
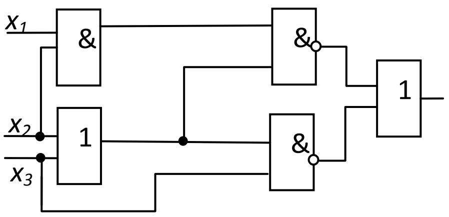
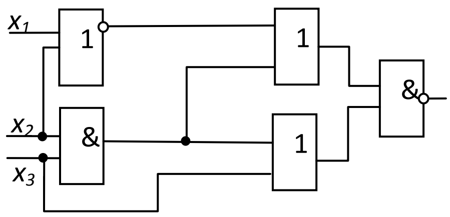
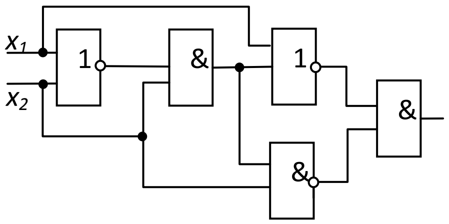
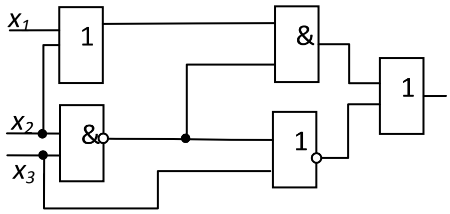
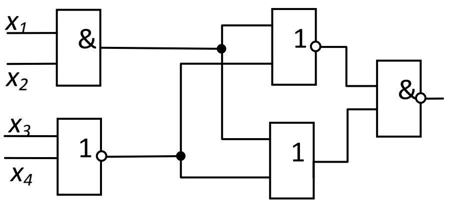
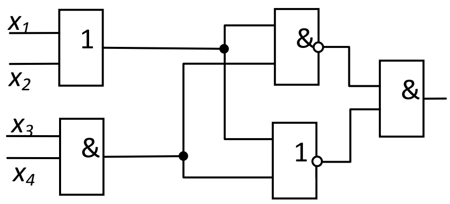
Задание 1

1	$(A \leftrightarrow B) \vee A\overline{B} \vee C$	16	$B \vee (A \leftrightarrow CB) \vee A\overline{C}$
2	$(A \to B) \vee A\overline{C} \vee BC$	17	$(AC \to B) \vee AB\overline{C}$
3	$(AC \to B) \vee A\overline{C}$	18	$(\overline{A} \leftrightarrow C)(B\overline{C} \to AB)$
4	$A\overline{B} \vee (A \leftrightarrow C)B$	19	$(B \to C) \vee (B \to AC)$
5	$(\overline{A} \to B)(A\overline{C} \vee BC)$	20	$(AB \to C) \vee A \vee \overline{A}C$
6	$(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee AC$	21	$(A \leftrightarrow C) \vee (A\overline{B} \to C)$
7	$(A \leftrightarrow C) \vee A\overline{B} \vee BC$	22	$(\overline{A}B \to \overline{C}) \vee ABC$
8	$(C \leftrightarrow B) \vee A\overline{C} \vee BC$	23	$(AB \to C) \vee A\overline{C}$
9	$(BC \to A) \vee A\overline{C}$	24	$(\overline{A} \to BC)(A \leftrightarrow C)$
10	$(AB \to C) \vee A\overline{C}$	25	$(\overline{A} \leftrightarrow B) \vee (A \to BC)$
11	$(\overline{A} \to C)(B\overline{C} \vee AB)$	26	$(\overline{A \to B})(C\overline{A} \to B)$
12	$(\overline{A} \leftrightarrow B)(A \to BC)$	27	$(A \to \overline{B}C) \vee A\overline{B} \vee BC$
13	$(B \to C) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}C$	28	$(A \to C) \vee A\overline{B} \vee BC$
14	$(A \to \overline{B}C) \vee A\overline{B} \vee B\overline{C}$	29	$(\overline{A \to B})(B\overline{A} \to C)$
15	$(AC \to \overline{B}) \vee B\overline{C}$	30	$(AB \to \overline{C}) \vee A\overline{B}C$

Задание 2

1		16	
2		17	

3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	

11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

7 Содержание отчета

1 Название работы
2 Цель работы
3 Технические средства обучения
4 Задания (условия задач)
5 Порядок выполнения работы
6 Ответы на контрольные вопросы
7 Вывод (по цели)

8 Контрольные вопросы:

1 Что такое логика?
2 Что называется высказыванием?
3 Что такое утверждение?
4 Что называется рассуждением?
5 Что такое умозаключение?

6 Что такое логическое выражение?
7 Какие бывают логические выражения?
8 Что такое алгебра логики?
9 Понятие, обозначение и таблица истинности инверсии.
10 Понятие, обозначение и таблица истинности конъюнкции.
11 Понятие и обозначение и таблица истинности дизъюнкции.
12 Понятие, обозначение и таблица истинности импликации.
13 Понятие, обозначение и таблица истинности эквивалентности
14 Порядок действий в сложных логических выражений.
15 Способ изменения порядка действий в логических выражениях.
16 Понятие, обозначение и таблица истинности штриха Шеффера
17 Понятие, обозначение и таблица истинности стрелки Пирса
18 Понятие, обозначение и таблица истинности суммы по модулю два
19 Закон двойного отрицания
20 Законы идемпотентности
21 Коммутативные законы
22 Ассоциативные законы
23 Дистрибутивные законы
24 Законы де Моргана
25 Законы нуля и единицы
26 Законы поглощения
27 Закон исключенного третьего и закон противоречия
28 Формула преобразования импликации
29 Формула преобразования эквивалентности
30 Комбинационная схема
31 Функциональная схема

9 Литература:

- Михеева Е.В. Информационные технологии в профессиональной деятельности (12-е изд., стер.) учеб. пособие. – М.:Академия,2013.
- Михеева Е.В. Практикум по Информационным технологиям в профессиональной деятельности. – М.: Академия,2013.
- http://rudocs.exdat.com/docs/index-59747.html
- http://www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf7.html
- http://informatika.sch880.ru/p25aa1.html
- http://window.edu.ru/library/pdf2txt/659/47659/23617